



« Un buon disegno vale più di un lungo discorso » affermava Napoleone Bonaparte.

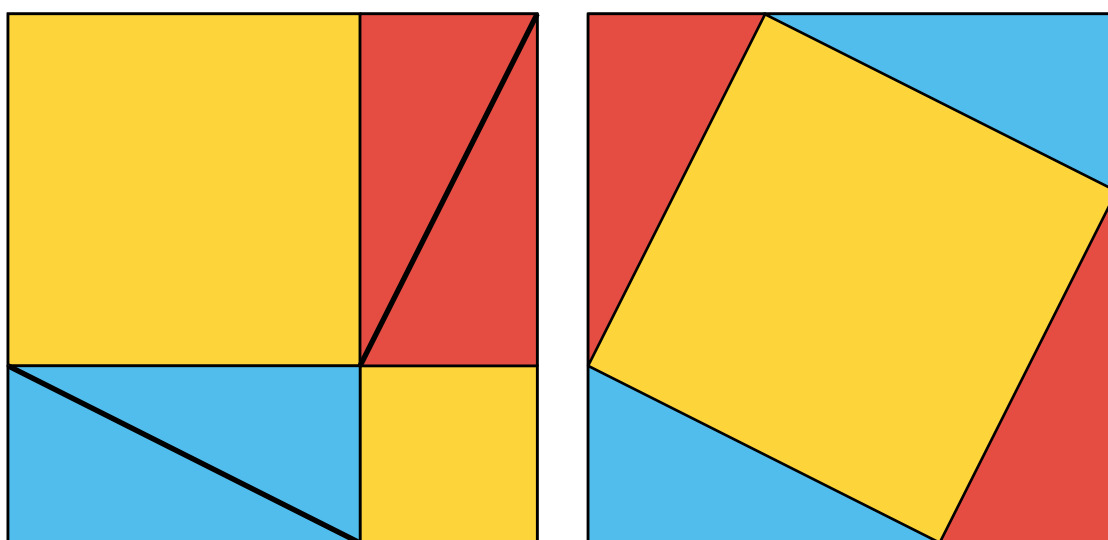
Il potere di suggestione delle immagini non può certo essere negato: infatti, un discorso è sequenziale e può richiedere un certo tempo, a volte non trascurabile, per essere compreso, mentre l'immagine è bidimensionale e la sua comprensione può essere istantanea.

Una dimostrazione per immagini è un disegno che sollecita l'intelligenza suggerendole una proposizione e/o un procedimento.

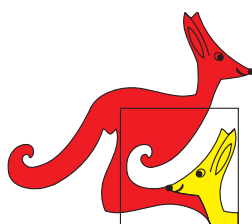
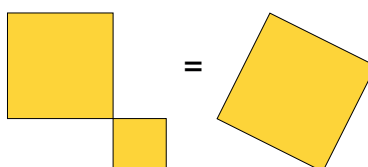
E l'immagine diventa « dimostrazione » quando il funzionamento della nostra mente ricostruisce i legami logici suggeriti dalla disposizione e dai colori.

Tra i soggetti classici ed i più moderni, abbiamo scelto di mostrarvene un centinaio, ripartiti in due volumi: *Dimostrazioni per immagini I* e *Dimostrazioni per immagini II*. Molti sono stati pubblicati sulla rivista americana **Mathematics Magazine**, poi raccolti da Roger B. Nelsen (*Proofs without words*, 1993 e 2000). Noi indichiamo la provenienza a fianco di ogni immagine.

Buona « lettura » di questo primo volume.



Il teorema di Pitagora



Dimostrazioni per immagini - Volume 1

ISBN : 978-88-89249-48-2

© marzo 2015, **ACL - les éditions du Kangourou**

© gennaio 2016, Edizioni Kangourou Italia, Via G. Medici 2, 20900 Monza

www.kangourou.it



INDICE

SOMMA DI INTERI

Somma dei primi n interi
 Somma dei primi interi dispari
 Somma simmetrica di interi
 Somma simmetrica di interi dispari
 Somma degli interi tra quadrati consecutivi
 Quadrati concentrici di domino
 Somma di quadrati
 Somma di cubi

I NUMERI POLIGONALI

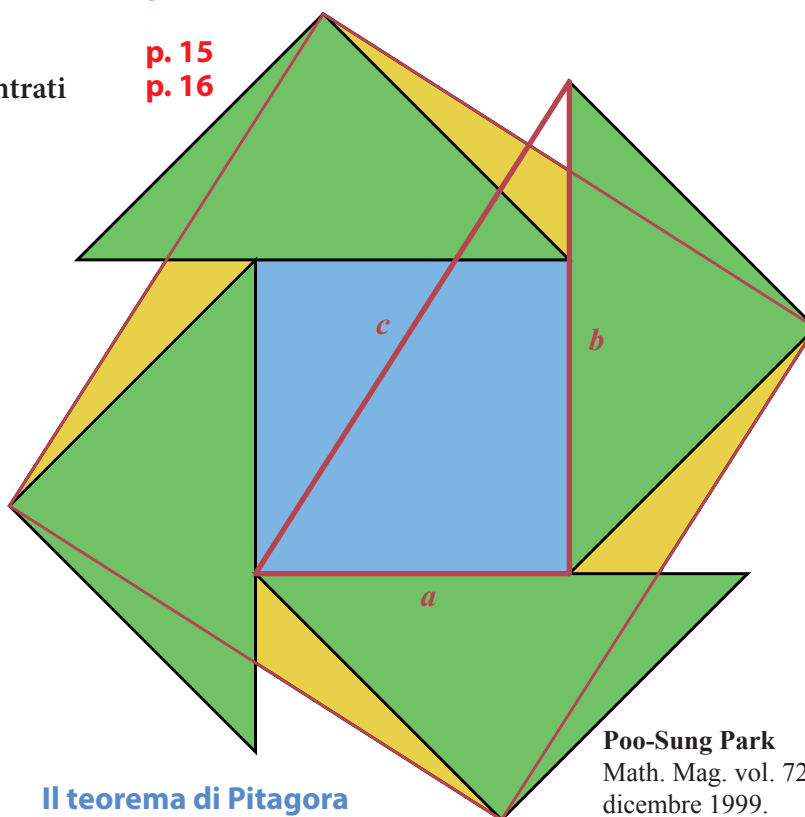
I numeri triangolari
 Due relazioni verificate
 dai numeri triangolari
 Due formule
 per i numeri triangolari
 Somma di un numero pari
 di numeri triangolari a segni alterni
 I numeri (che sono dei) quadrati
 Relazione tra numeri triangolari
 e quadrati dispari
 I numeri pentagonali
 Tre identità relative
 ai numeri pentagonali
 I numeri esagonali
 Tre identità relative
 ai numeri esagonali
 Somma di numeri esagonali centrati

L'ALGEBRA

p. 3 La distributività p. 18
 p. 3 Una identità notevole p. 19
 p. 4 Una identità cinese p. 20
 p. 5 La figura algebrica di Al-Khwarîzmî p. 20
 p. 6 La media geometrica p. 21
 p. 6 Due identità notevoli nello spazio p. 22

LE AREE

Il teorema della farfalla p. 23
 Il teorema dei campi p. 23
 p. 9 La suddivisione del parallelogramma p. 24
 Area di un quadrilatero convesso p. 24
 p. 9 Il teorema di Pitagora p. 25
 La dimostrazione di Euclide p. 26
 p. 10 Un teorema «en passant» p. 27
 I 4 triangoli di Pitagora p. 27
 p. 11 Una generalizzazione del teorema di
 Pitagora p. 28
 Area di un aquilone con due angoli retti p. 30
 p. 12 Area del triangolo in funzione
 del raggio del cerchio inscritto p. 30
 p. 13 Area di un dodecagono regolare p. 31
 p. 13 Il teorema dei «Calisson» p. 32
 p. 15
 p. 15
 p. 16



Il teorema di Pitagora

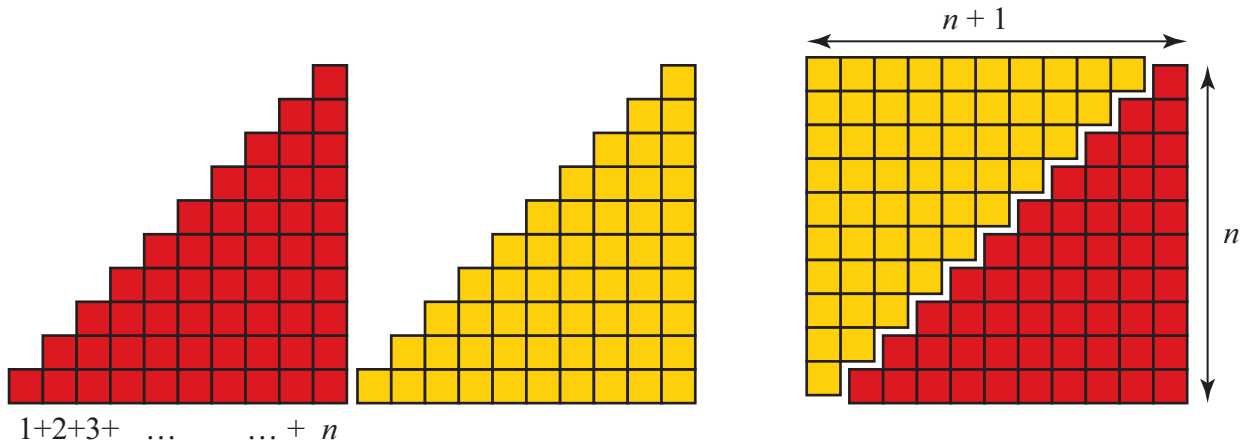
Poo-Sung Park
 Math. Mag. vol. 72, n° 5,
 dicembre 1999.

Somma di interi

Somma dei primi n interi

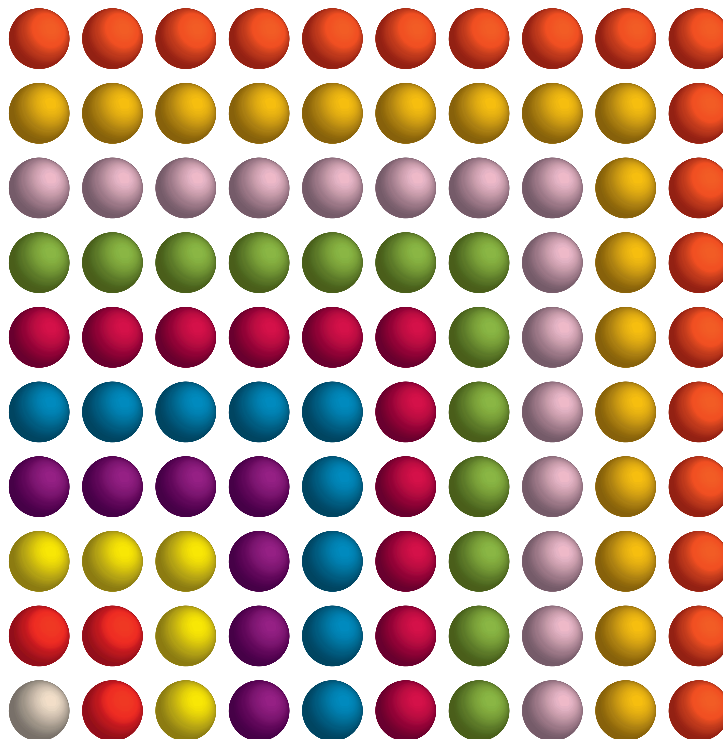
Sappiamo come il piccolo **Karl Friedrich Gauss** (1777-1855) seppe rispondere senza esitazione al suo maestro che gli chiedeva la somma dei primi 100 interi: 5050.
Ecco illustrato il suo « trucco » per dimostrare la formula

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



Somma dei primi interi dispari

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$



$$1 + 3 + 5 + \dots + 19 = 100.$$

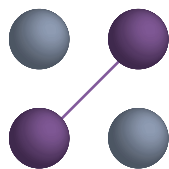
Nicomaco di Gerasa
Introduzione all'aritmetica
(\approx 150 D.C.)

Somma simmetrica di interi

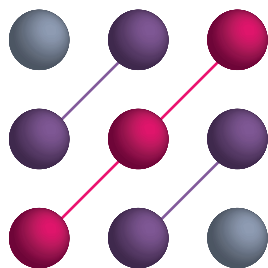
La formula di Gauss può anche essere dedotta dalla seguente, e viceversa.

Per ogni naturale n ,

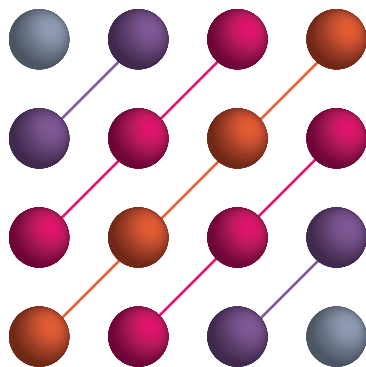
$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n + (n - 1) + \dots + 3 + 2 + 1 = n^2.$$



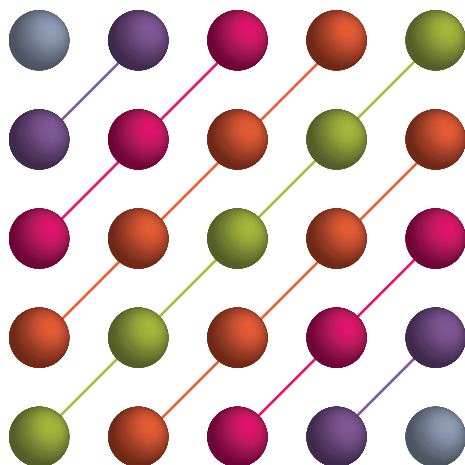
$$1 + 2 + 1 = 2^2$$



$$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$$



$$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$$



$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 5^2$$

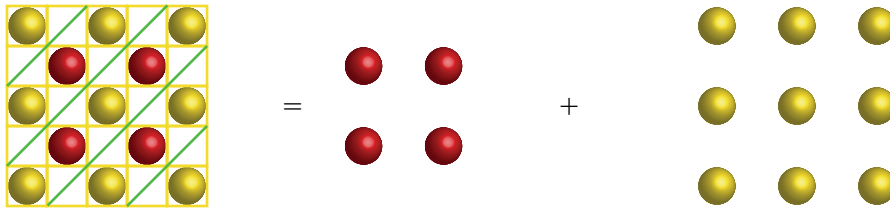


Somma simmetrica di interi dispari

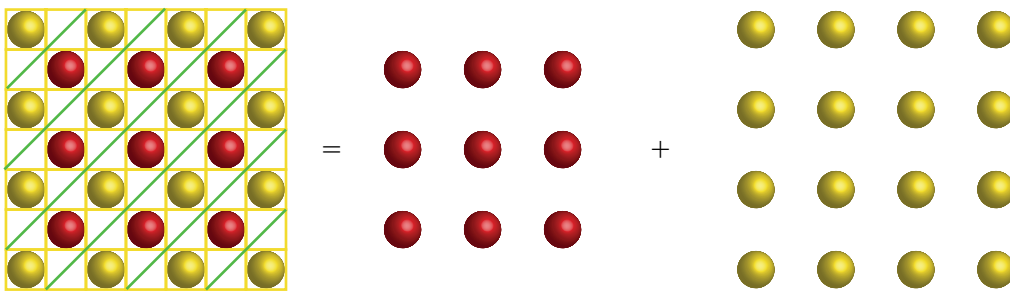
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) + (2n - 1) + \dots + 5 + 3 + 1 = n^2 + (n + 1)^2.$$



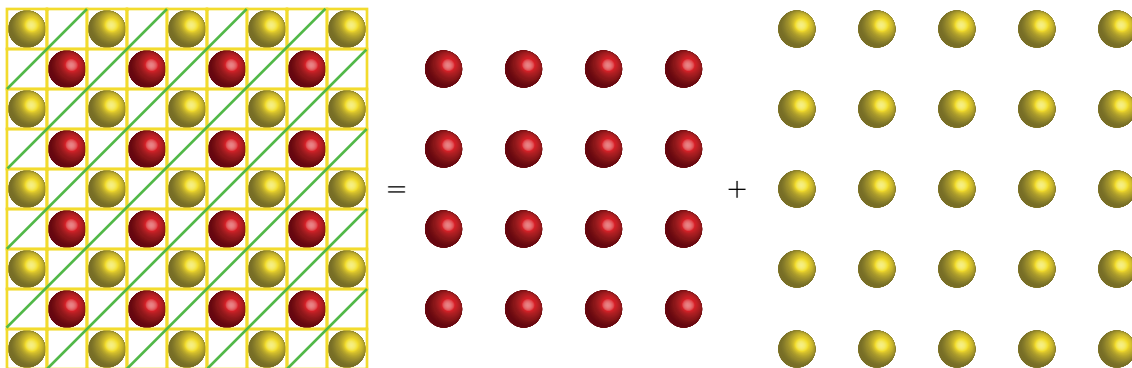
$$1 + 3 + 1 = 1^2 + 2^2$$



$$1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 2^2 + 3^2$$



$$1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1 = 3^2 + 4^2$$



$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 4^2 + 5^2$$

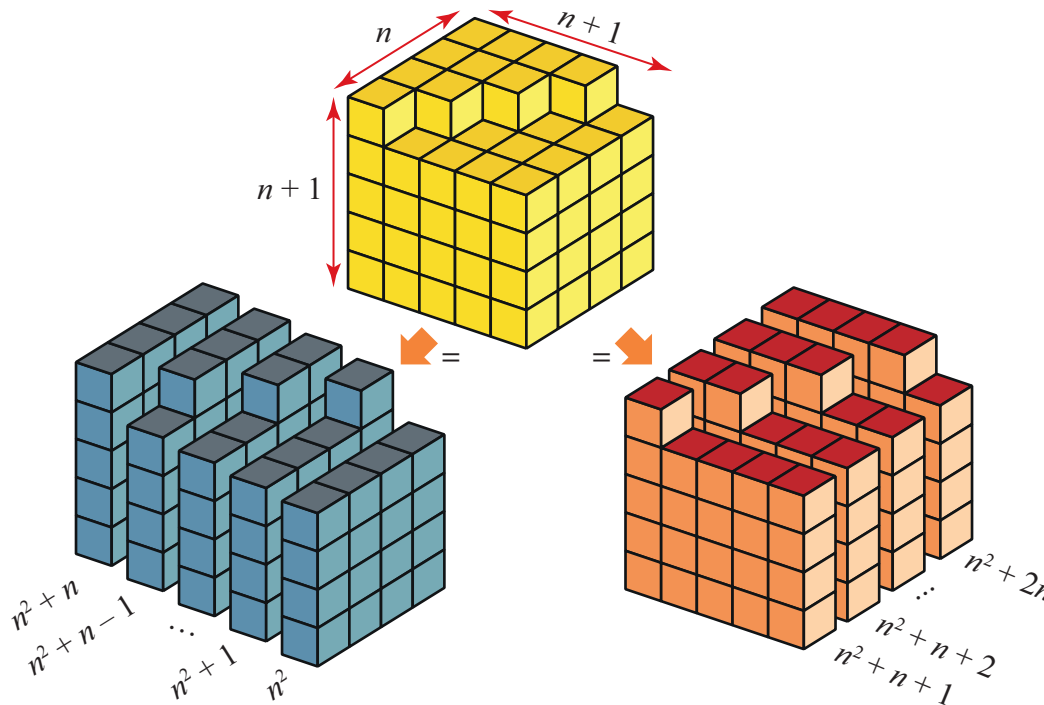
Hee Sik Kim
Math. Mag. vol. 66, n° 3, giugno 1993.



Somma degli interi tra quadrati consecutivi

$$\begin{aligned}
 1 + 2 &= 3 \\
 4 + 5 + 6 &= 7 + 8 \\
 9 + 10 + 11 + 12 &= 13 + 14 + 15 \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

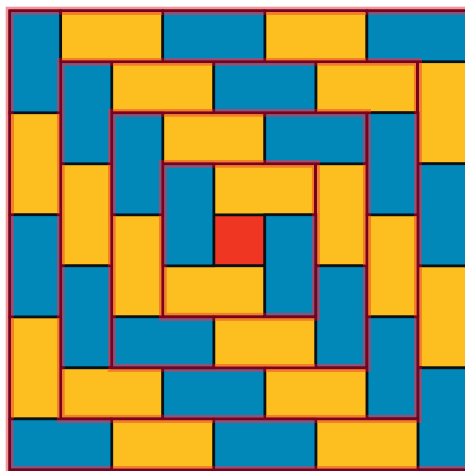
$$n^2 + (n^2 + 1) + \dots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + \dots + (n^2 + 2n).$$



Roger B. Nelsen
Math. Mag. vol. 63, n° 1,
febbraio 1990.

Quadrati concentrici di domino

$$1 + (4 + 8 + 12 + \dots + 4n) \times 2 = (2n + 1)^2.$$



$$1 + 2 \sum_{k=1}^n 4k = (2n + 1)^2$$

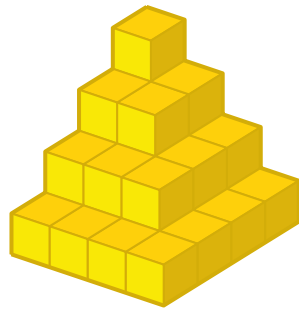
Shirley A. Wakin
Math. Mag. vol. 60, n° 5,
dicembre 1987.

Con $n = 4$, $1 + 4 \times 2 + 8 \times 2 + 12 \times 2 + 16 \times 2 = 9^2$

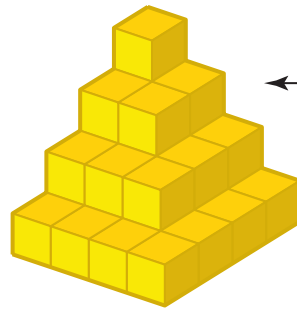


Somma di quadrati

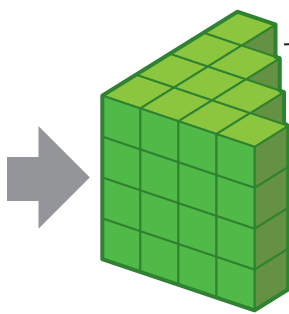
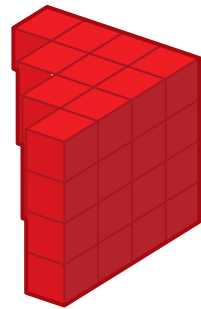
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



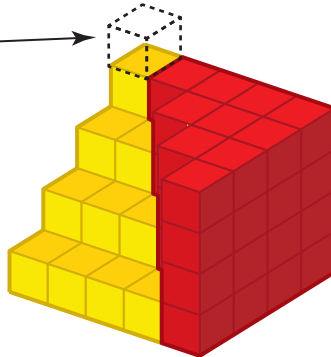
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$$



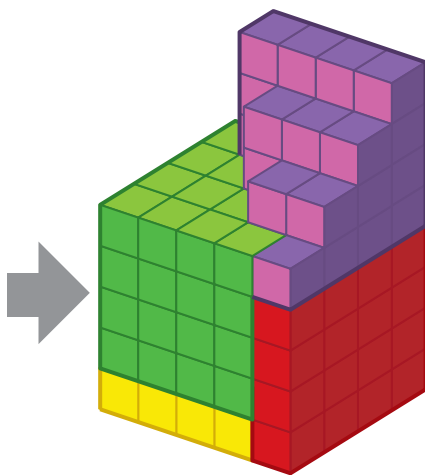
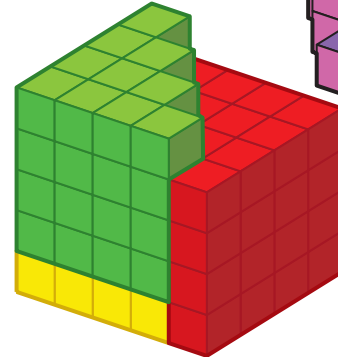
$$2(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$



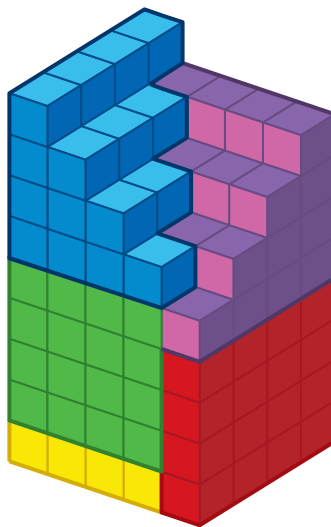
$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$



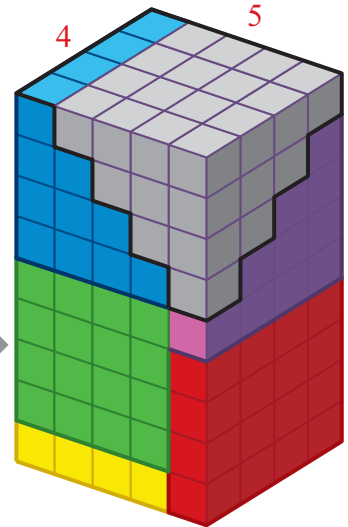
$$4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$



$$4(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$



$$5(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$

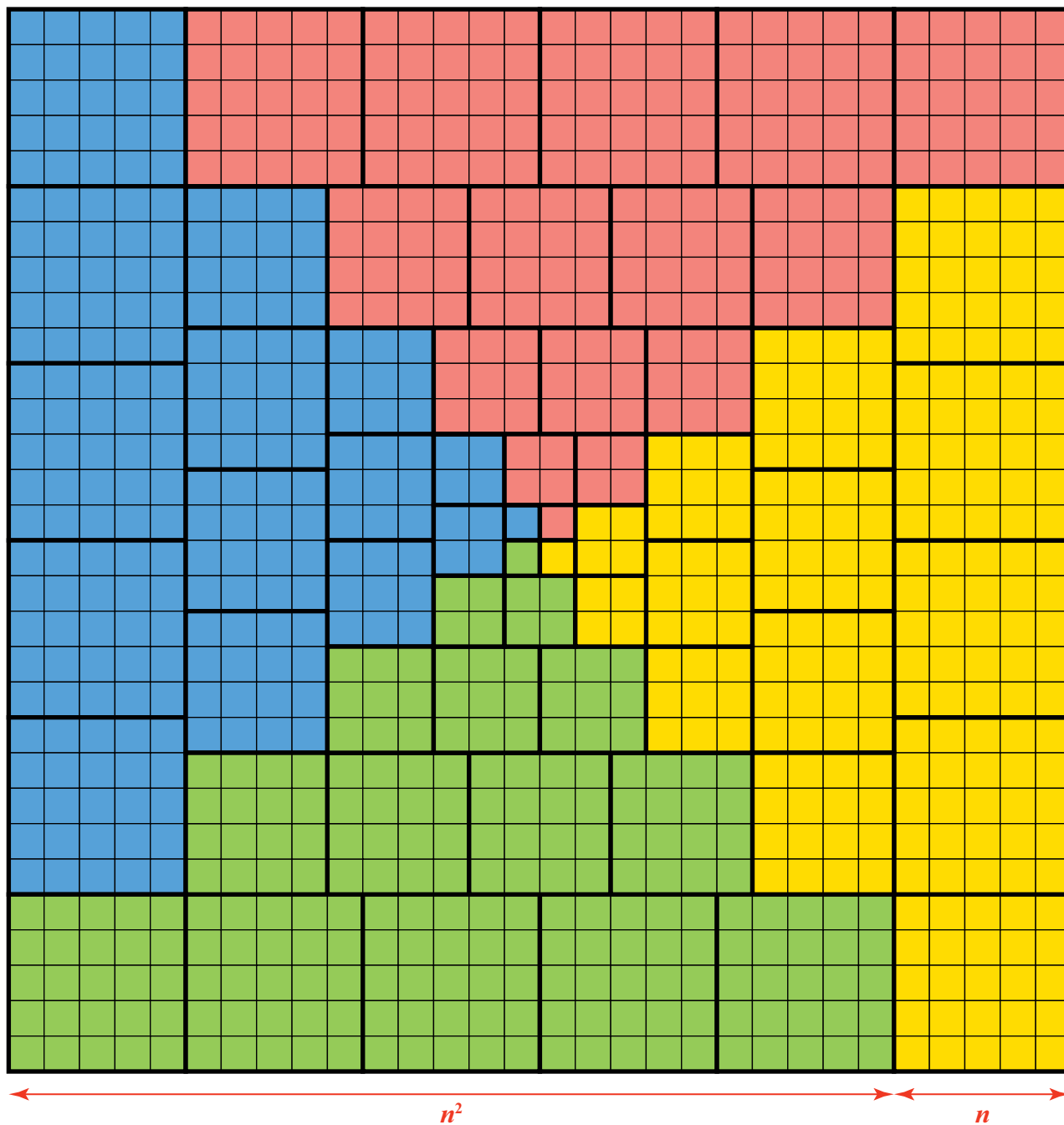


$$6(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$$



Somma di cubi

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{1}{4} [n(n+1)]^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$



La figura (qui per $n=5$, ma generalizzabile) mostra un grande quadrato di lato $25 + 5 = 5 \times (5 + 1)$ suddiviso in quadratini. Il numero totale di quadratini vale 4 volte il numero di quadratini dello stesso colore, il quale vale $1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + 4 \times 4^2 + 5 \times 5^2$. L'altezza di ogni *triangolo di colore* è $1 + 2 + 3 + \dots + n$ e il lato del grande quadrato vale due volte quest'altezza.

Warren Lushbaugh,
Mathematical Gazette, maggio 1965.