« Un buon disegno vale più di un lungo discorso » affermava Napoleone Bonaparte.

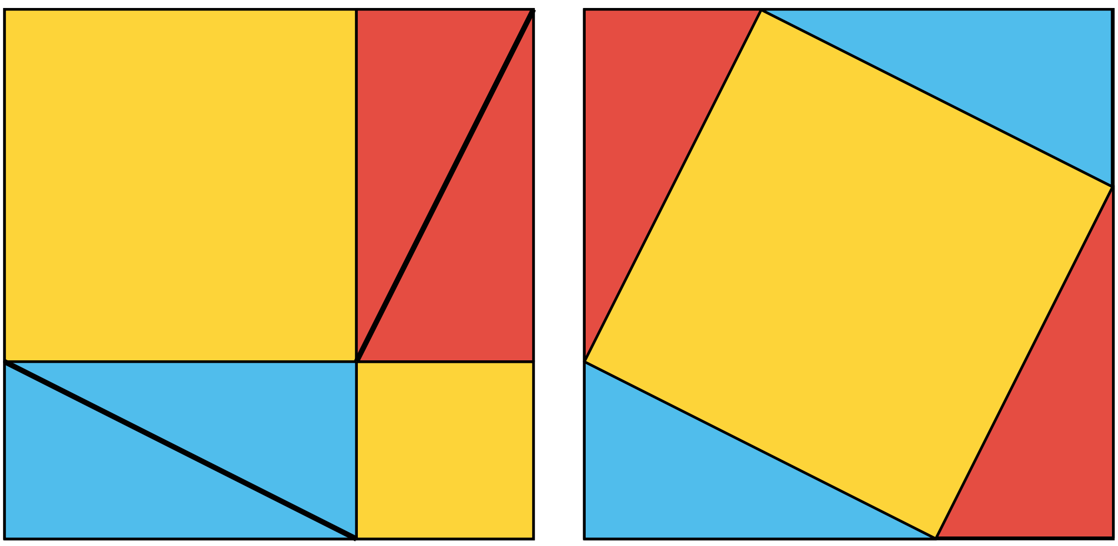
Il potere di suggestione delle immagini non può certo essere negato: infatti, un discorso è sequenziale e può richiedere un certo tempo, a volte non trascurabile, per essere compreso, mentre l'immagine è bidimensionale e la sua comprensione può essere istantanea.

Una dimostrazione per immagini è un disegno che sollecita l'intelligenza suggerendole una proposizione e/o un procedimento.

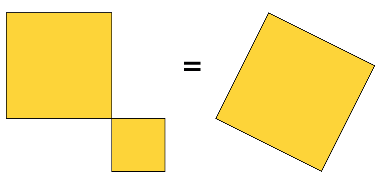
E l'immagine diventa «dimostrazione» quando il funzionamento della nostra mente ricostruisce i legami logici suggeriti dalla disposizione e dai colori.

Tra i soggetti classici ed i più moderni, abbiamo scelto di mostrarvene un centinaio, ripartiti in due volumi: ***Dimostrazioni per immagini I*** e ***Dimostrazioni per immagini II***. Molti sono stati pubblicati sulla rivista americana **Mathematics Magazine,** poi raccolti da Roger B. Nelsen (***Proofs without words***, 1993 e 2000). Noi indichiamo la provenienza a fianco di ogni immagine.

Buona « lettura » di questo primo volume.



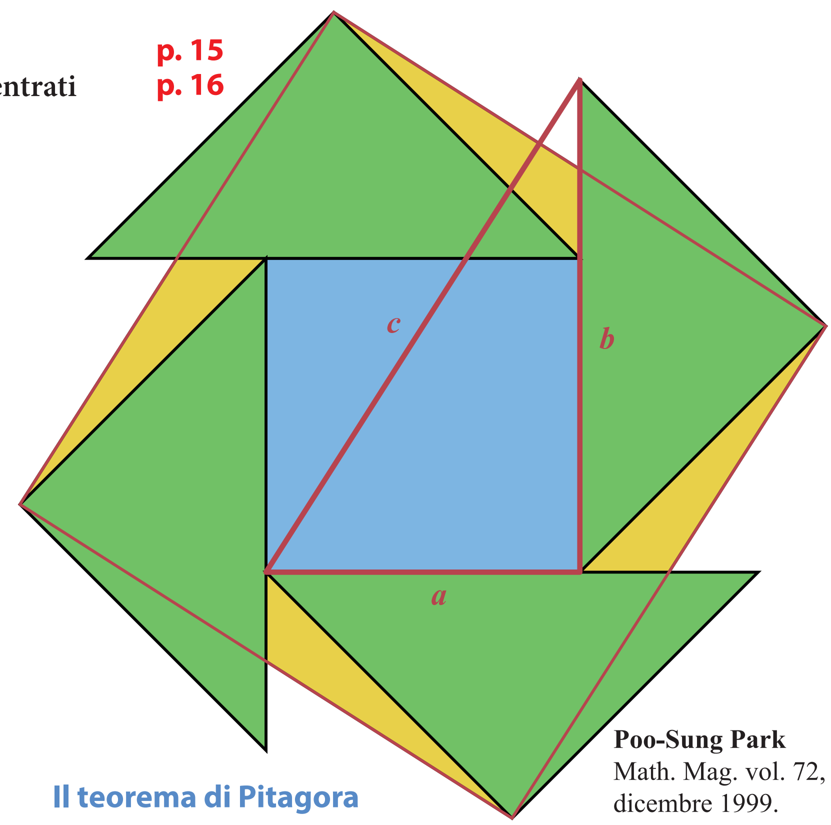
Il teorema di Pitagora



Dimostrazioni per immagini - Volume 1
ISBN : 978-88-89249-48-2

www.kangourou.it

INDICE



Poo-Sung Park
Math. Mag. vol. 72, n° 5, dicembre 1999.

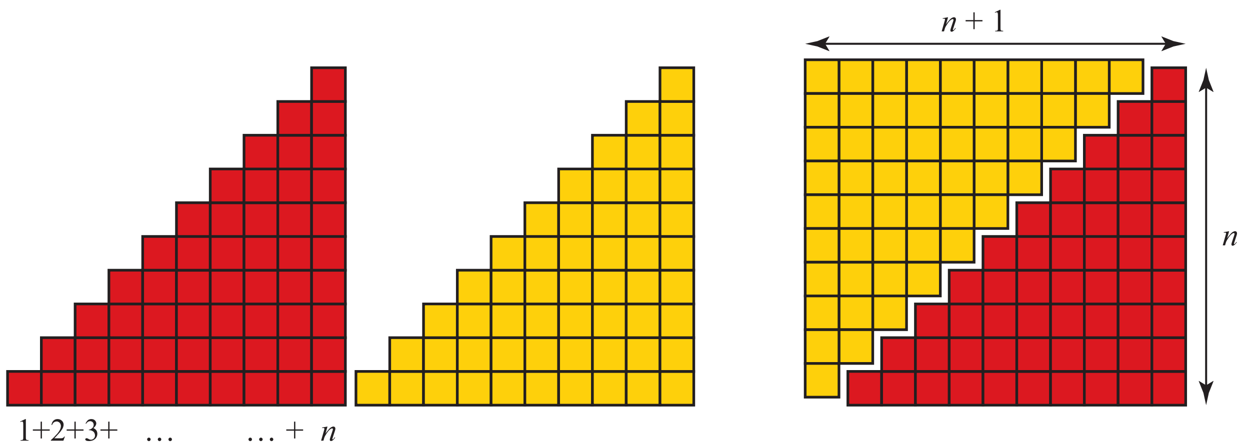
Il teorema di Pitagora

Somma di interi

Somma dei primi *n* interi

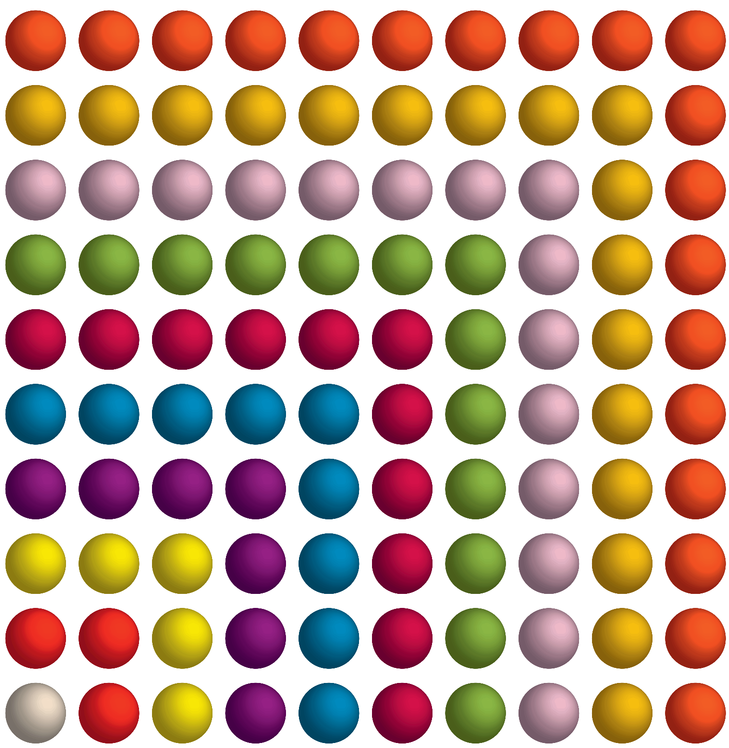
Sappiamo come il piccolo **Karl Friedrich Gauss** (1777-1855) seppe rispondere senza esitazione al suo maestro che gli chiedeva la somma dei primi 100 interi: 5050.
Ecco illustrato il suo « trucco » per dimostrare la formula

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$



Somma dei primi interi dispari

$$\mathbf{1 + 3 + 5 + \ldots + (2}\boldsymbol{n}\mathbf{ - 1) =}\ \boldsymbol{n}^{\mathbf{2}}\mathbf{.}$$



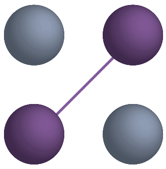
1 + 3 + 5 + ⋯ + 19 = 100.

Nicomaco di Gerasa
Introduzione all'aritmetica
(≃ 150 D.C.)

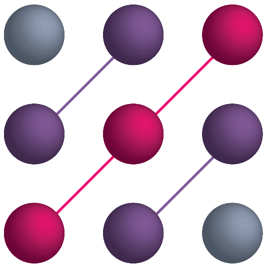
Somma simmetrica di interi

La formula di Gauss può anche essere dedotta dalla seguente, e viceversa.
Per ogni naturale n,

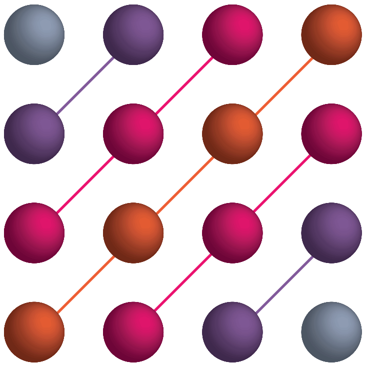
$$\mathbf{1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n + (n-1) + \ldots + 3 + 2 + 1 = n^2.}$$



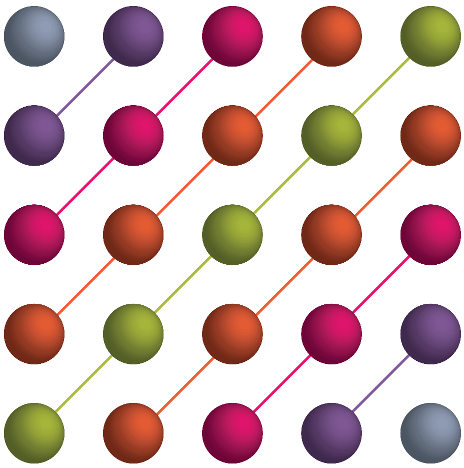
$1 + 2 + 1 = 2^2$



$1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 3^2$



$1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 4^2$

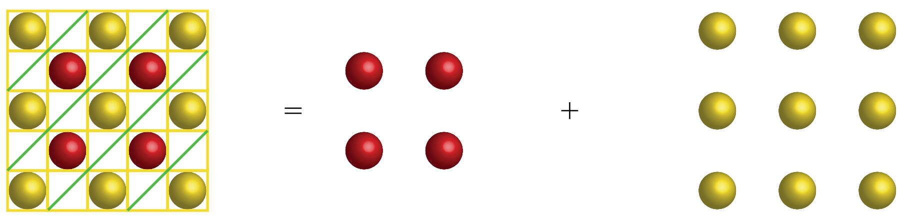


$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 5^2$

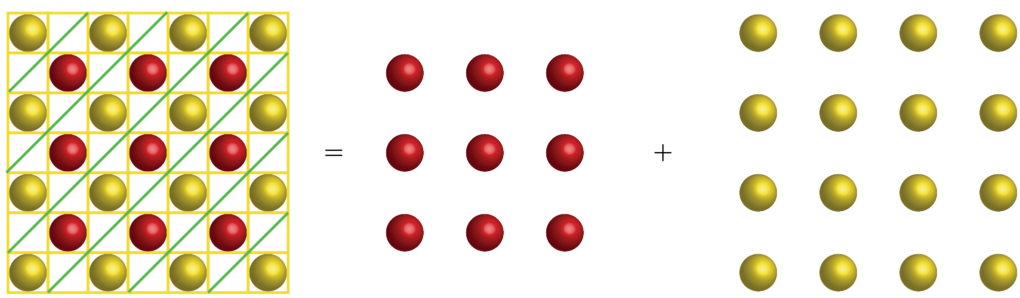
Somma simmetrica di interi dispari

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) + (2n - 1) + \ldots + 5 + 3 + 1 = n^2 + (n + 1)^2.$$

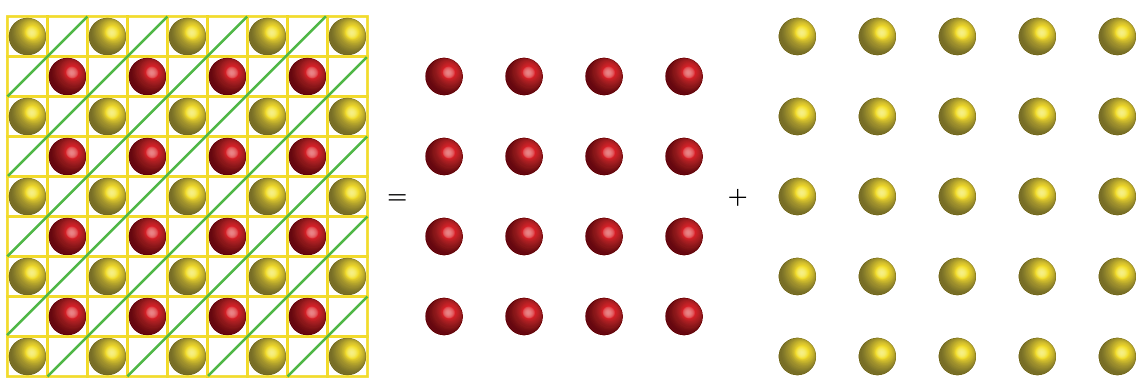
$1 + 3 + 1 = 1^2 + 2^2$



$1 + 3 + 5 + 3 + 1 = 2^2 + 3^2$



$1 + 3 + 5 + 7 + 5 + 3 + 1 = 3^2 + 4^2$



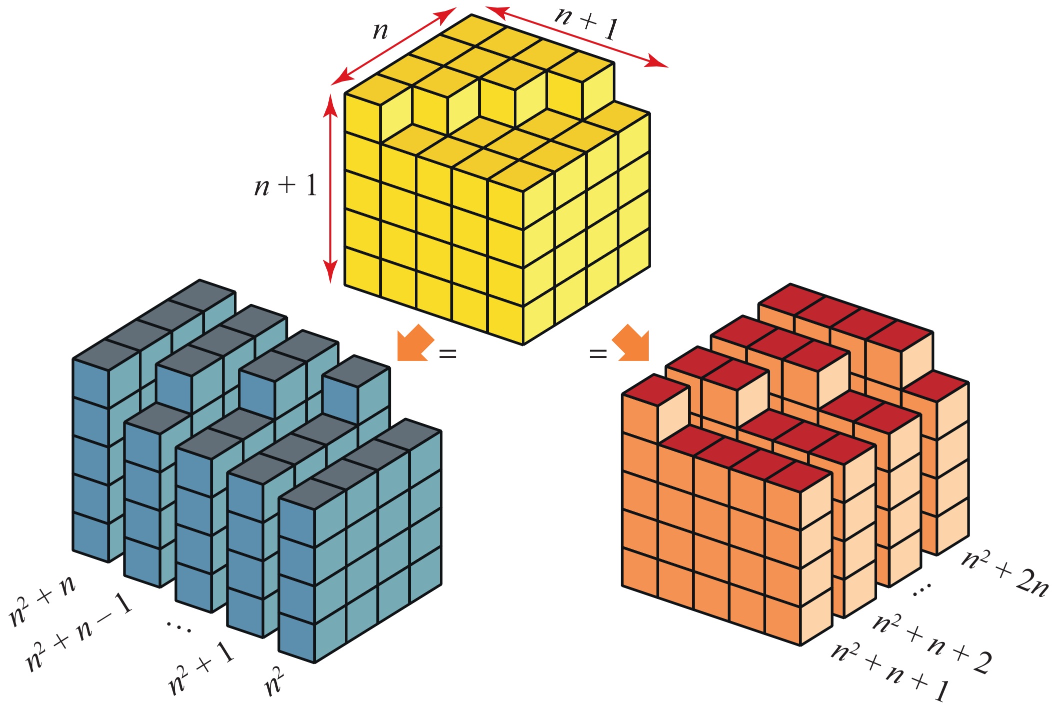
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 4^2 + 5^2$

Hee Sik Kim
Math. Mag. vol. 66, n° 3, giugno 1993.

Somma degli interi tra quadrati consecutivi

$$1 + 2 = 3$$
$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$
$$\cdots$$

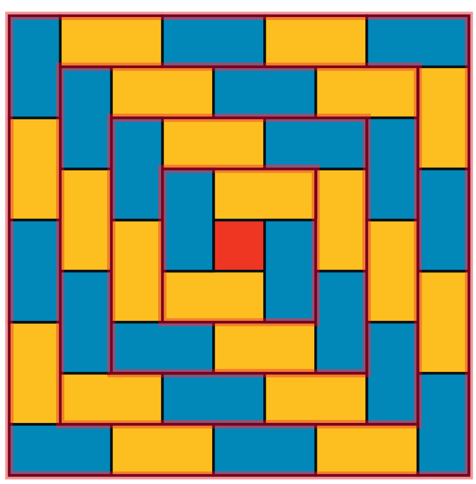
$$\boldsymbol{n^2 + (n^2 + 1) + \ldots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + (n^2 + n + 2) + \ldots + (n^2 + 2n).}$$



Roger B. Nelsen
Math. Mag. vol. 63, n° 1,
febbraio 1990.

Quadrati concentrici di domino

$$\mathbf{1 + (4 + 8 + 12 + \ldots + 4}\boldsymbol{n}\mathbf{) \times 2 = (2}\boldsymbol{n}\mathbf{ + 1)^2.}$$



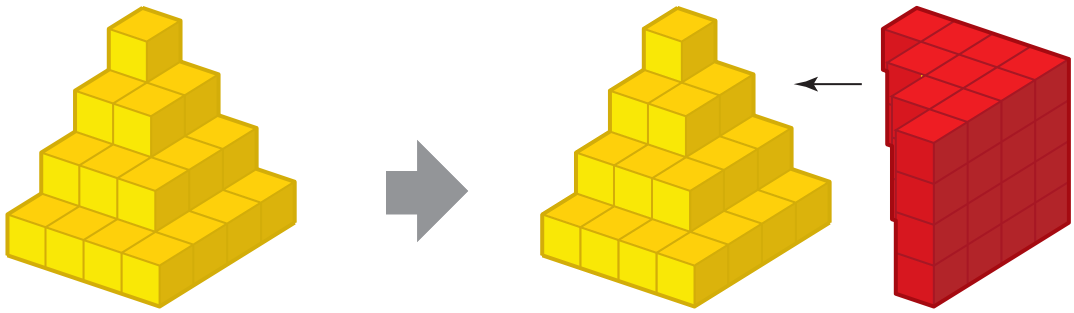
$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} 4k = (2n+1)^2$$

Shirley A. Wakin
Math. Mag. vol. 60, n° 5,
dicembre 1987.

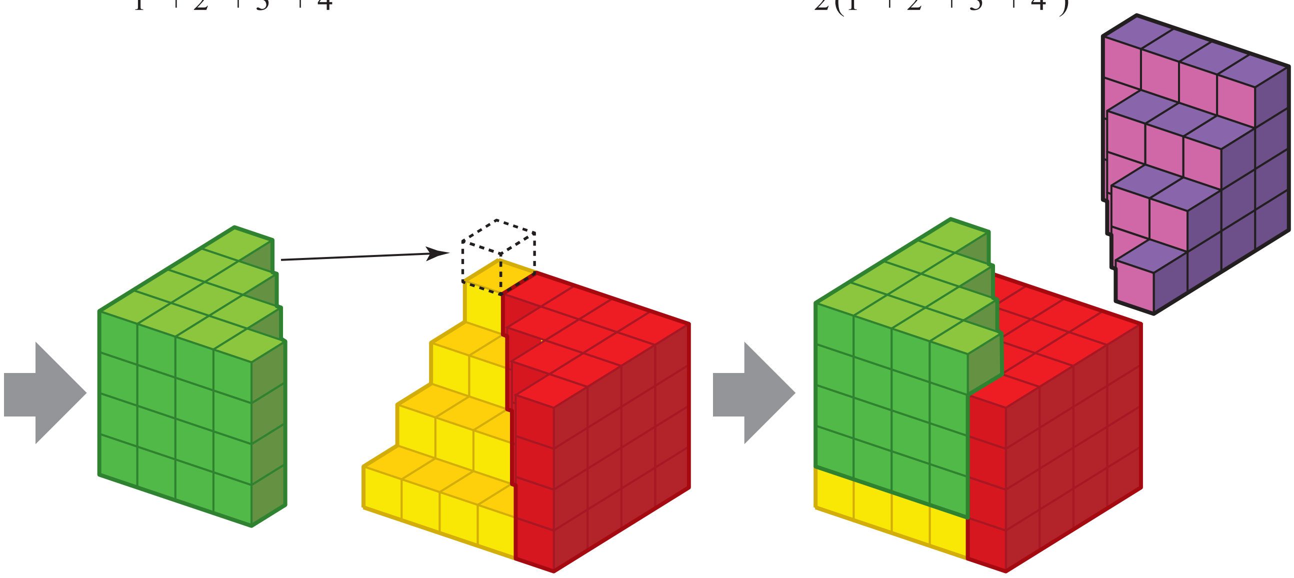
Con $n = 4$, $1 + 4 \times 2 + 8 \times 2 + 12 \times 2 + 16 \times 2 = 9^2$

Somma di quadrati

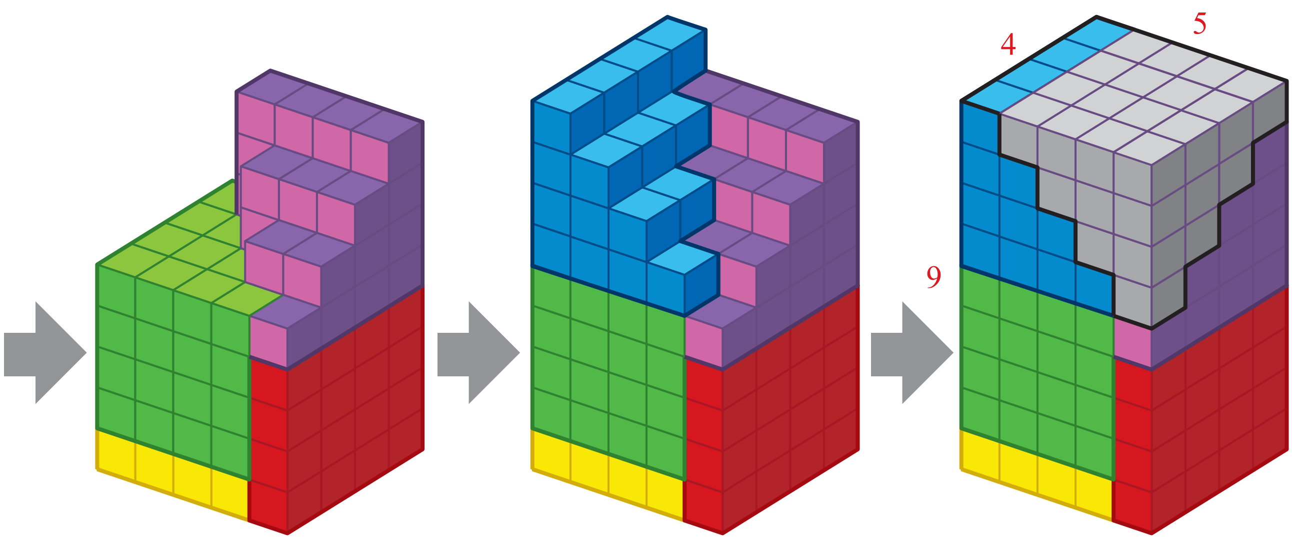
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ $\qquad$ $2\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$



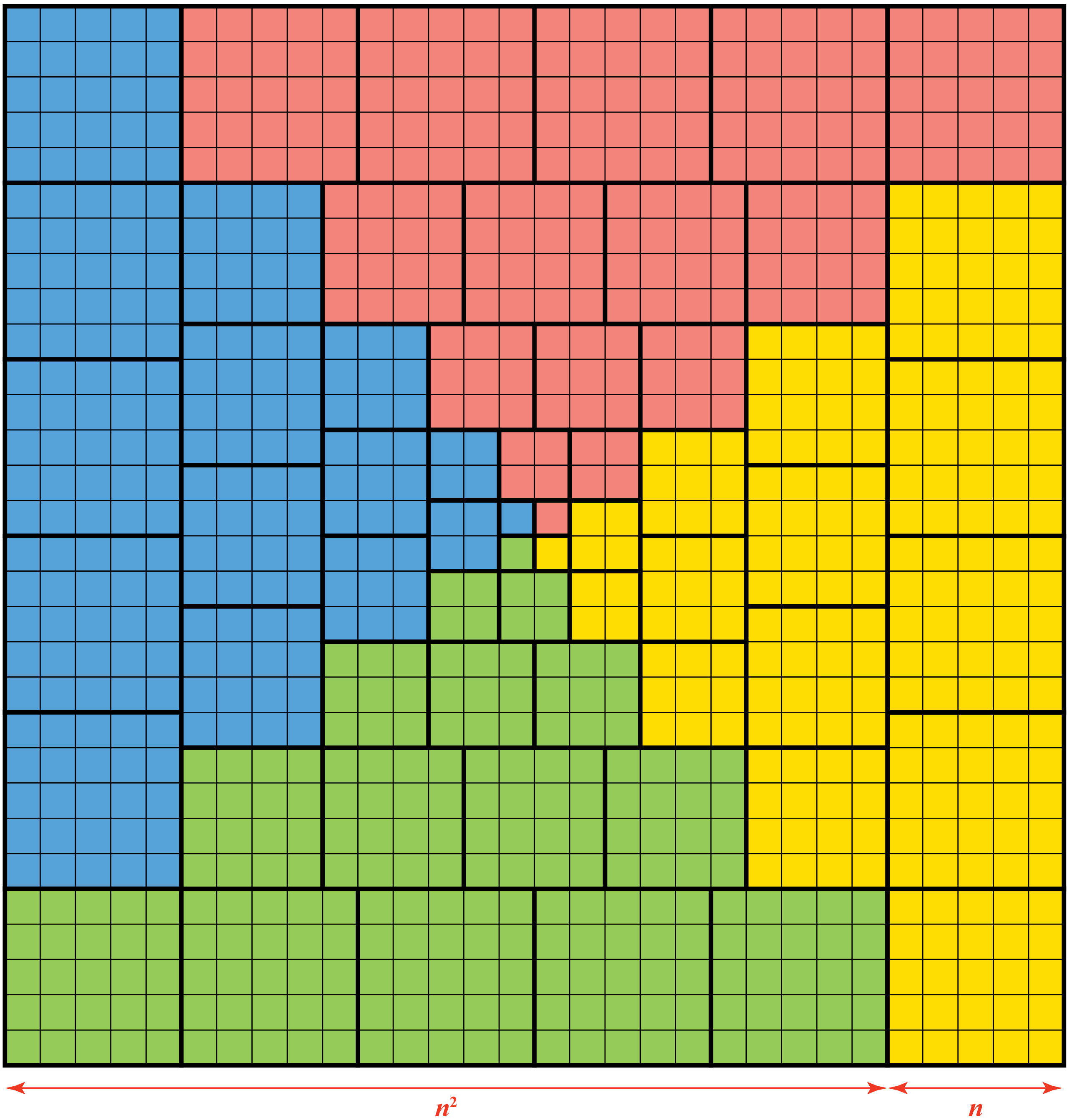
$3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$ $\qquad$ $4\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$



$4\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$ $\qquad$ $5\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$ $\qquad$ $6\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)$

Somma di cubi

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}\left[n(n+1)\right]^2 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$



Warren Lushbaugh,
Mathematical Gazette, maggio 1965.

La figura (qui per $n=5$, ma generalizzabile) mostra un grande quadrato di lato $25 + 5 = 5 \times (5 + 1)$ suddiviso in quadratini.
Il numero totale di quadratini vale 4 volte il numero di quadratini dello stesso colore, il quale vale $1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 3^2 + 4 \times 4^2 + 5 \times 5^2$.
L'altezza di ogni *triangolo di colore* è $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ e il lato del grande quadrato vale due volte quest'altezza.