Kangourou della Matematica

Semifinale individuale

20 maggio 2022

JUNIOR

Quesiti a risposta chiusa

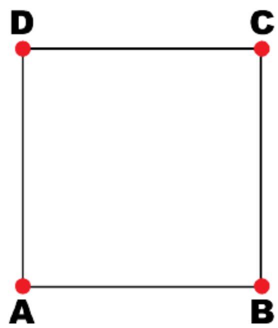
1. (2 punti) Sandra ha scritto su un foglio ciascuno dei numeri interi da 2021 a 2029. Samuele, che ha a disposizione una calcolatrice, ne sceglie due a caso, li elimina e sostituisce ad essi il loro prodotto. Procede sugli otto numeri rimasti allo stesso modo ottenendone sette e così via, fino a quando sul foglio rimane un solo numero. Qual è la cifra delle unità di questo numero?

A) 0 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

2. (3 punti) Per concimare un prato quadrato di 25 metri di lato occorre una certa quantità q di concime. Quali dei seguenti numeri è il più vicino alla quantità di concime supplementare che occorre per concimare con la stessa modalità un prato quadrato di 30 metri di lato?

A) $q/6$ **B)** $q/5$ **C)** $q/4$ **D)** $q/3$ **E)** $q/2$

3. (3 punti) In figura vedete un quadrato sul bordo del quale Ada e Bice si allenano a correre, ognuna senza mai cambiare verso, ma non sappiamo se nello stesso verso o in verso opposto. Corrono per molti giri ciascuna a velocità costante, ma quella di Ada è il triplo di quella di Bice. In questo momento Ada è sul vertice A mentre Bice è sul vertice B. Quante delle seguenti affermazioni sono corrette?



- Ada e Bice non si troveranno mai insieme nel vertice B.
- Ada e Bice non si troveranno mai insieme nel vertice C.
- Ada e Bice non si troveranno mai insieme nel vertice D.
- Qualche volta Ada e Bice si troveranno insieme nel vertice A.
- Ada e Bice non potranno trovarsi insieme se non in uno dei vertici.

A) 0 (nessuna) **B)** 1 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5 (tutte)

4. (4 punti) Ad un quesito di Kangourou a risposta chiusa come questo, con 5 opzioni per la risposta, hanno risposto 10.000 studenti. Di questi, alcuni hanno saputo determinare la risposta corretta in base alle loro conoscenze, gli altri hanno tirato ad indovinare scegliendo in modo del tutto casuale tra le 5 proposte. Le risposte risultate corrette sono state 3.000. Tra i seguenti numeri, quale è più probabile che sia il numero di coloro che conoscevano la risposta corretta?

A) 3.000 **B)** 2.500 **C)** 1.500 **D)** 1.250 **E)** 1.000

5. **(4 punti)** Simona scrive un numero intero di quattro cifre, poi leva la sua ultima cifra e la sposta in testa al numero (ad esempio, se il numero scritto fosse 1030 otterrebbe 0103). Ora Simona somma i due numeri così ottenuti: quanti dei seguenti numeri

1221, 8612, 4322, 13859

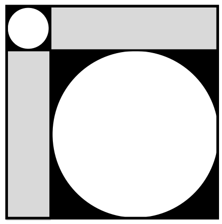
potrebbero essere il risultato?

A) 0 (nessuno) **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4 (tutti)

6. **(4 punti)** Le dimensioni di quattro rettangoli sono $a \times b$, $b \times c$, $c \times d$ e $d \times a$, dove tutti i numeri a, b, c e d sono interi positivi ed esprimono lunghezze in metri. La somma delle loro aree è 105 metri quadrati. Quale dei seguenti numeri certamente non è la somma dei loro perimetri in metri?

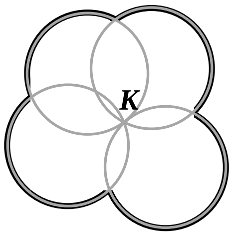
A) 88 **B)** 104 **C)** 124 **D)** 152 **E)** Nessuno, tutti potrebbero esserlo.

7. **(5 punti)** Nella figura vedi un quadrato ripartito in due rettangoli grigi e due quadrati. I due rettangoli sono congruenti e all'interno di ciascuno dei due quadrati è inscritto un cerchio. In ciascuno dei quadrati, la parte esterna al cerchio è verniciata di nero. La somma delle aree dei cerchi è 20π. Qual è l'area della regione verniciata di nero?



A) $4(5\pi - 4)$ **B)** $20(4 - \pi)$ **C)** $4 + \pi$ **D)** 8π **E)** $2022(2022 - \pi)$

8. **(5 punti)** La figura mostra quattro circonferenze di raggio 1 con esattamente un punto in comune a tutte. Quanto è lungo il bordo esterno della figura evidenziato dagli archi a tratto nero inspessito?



A) 3π **B)** $3\pi/2$ **C)** $8\pi/3$ **D)** 4π **E)** $11\pi/5$

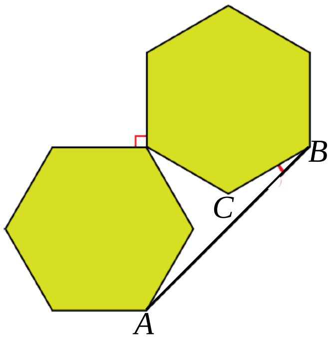
9. **(6 punti)** Anna ed Ernesto giocano nel modo seguente. Sul tavolo ci sono n carte coperte numerate da 1 a n, dove n è un numero pari. Anna ne gira una e poi Ernesto ne gira un'altra. Si moltiplicano quindi i numeri ottenuti: se il prodotto è un numero pari vince Anna, se è un numero dispari vince Ernesto. Si sa che la probabilità che vinca Anna è quattro volte la probabilità che vinca Ernesto. Quanto vale n?

A) 6 **B)** 8 **C)** 10 **D)** 12 **E)** 16

Quesiti a risposta aperta

10. **(4 punti)** Il numero 111.222.333.444.555.666.777.888.999 (ognuna delle cifre da 1 a 9 compare esattamente 3 volte) è divisibile per 111. Quante cifre ha il quoziente di tale divisione?

11. (5 punti) La figura mostra due esagoni regolari congruenti che hanno in comune solo un vertice. Due dei lati che confluiscono in quel vertice sono perpendicolari. Quanti gradi misura l'angolo $\widehat{ABC}$ indicato?



12. (5 punti) Cinque persone devono salire su un'auto che ha cinque posti, due davanti e tre dietro. Solo una di esse può guidare, due delle altre quattro non possono sedere una accanto all'altra, mentre sulle restanti due non vi sono vincoli. In quanti modi diversi possono prendere posto nell'auto? (*Due modi vanno considerati diversi se almeno uno dei posti dell'auto è occupato da persone diverse*.)

13. (6 punti) Una piccola macchina calcolatrice può eseguire solo quattro operazioni a scelta su un numero che venga assegnato: sottrarre 1, dividere per 2, moltiplicare per 3, sommare 4. Partendo dal numero 1 ed eseguendo in sequenza una alla volta operazioni come queste sui risultati via via ottenuti, qual è il minimo numero di operazioni che sono sufficienti per raggiungere 2022? (Ad esempio per raggiungere 6 ne occorrono e bastano 3: $1 \times 3 + 4 - 1$.)

14. (6 punti) Quante coppie di interi m, n con $m \leq n$ soddisfano l'uguaglianza $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$?

15. (6 punti) Chiamiamo *equo* un rettangolo di dimensioni intere $m \times n$ se accade quanto segue: quando viene ripartito in mn quadrati di lato unitario, i quadrati che stanno lungo il bordo sono tanti quanti i rimanenti (cioè quelli che stanno strettamente all'interno). Quanti sono, se ne esistono, i rettangoli equi? (*Un rettangolo $m \times n$ va considerato identico al rettangolo $n \times m$; se ritieni che vi siano infiniti rettangoli equi, rispondi 9999.*)

16. (7 punti) Qual è l'ultima cifra decimale diversa da 0 del numero $\frac{1}{5^{2022}}$?

17. (7 punti) Denotate con $\mathscr{P}$ l'insieme dei polinomi a coefficienti interi che hanno tra le loro radici il numero $1 + \sqrt{2}$ e tali che il loro grado sia il più basso possibile. Per un polinomio P, denotate con $s(P)$ la somma dei valori assoluti dei coefficienti di P. Qual è il minimo valore possibile per $s(P)$ al variare di P in $\mathscr{P}$?

18. (8 punti) Per quante coppie ordinate (x, y) di interi positivi accade che entrambi gli interi $x^2 + y$ e $x + y^2$ siano quadrati perfetti? (*Scrivete 9999 se ritenete che vi siano infinite coppie.*)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	E	C	D	B	C	B	D	A	25	15	16	9	3	2	4	4	0