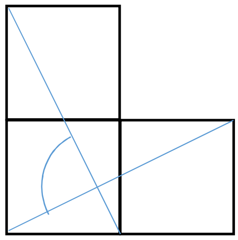
Kangourou della Matematica 2022
finale nazionale italiana
Cervia, 24 settembre 2022

LIVELLO CADET

Tutte le risposte devono essere giustificate



C1. (*5 punti*) In figura appaiono accostati tre quadrati. Quanti gradi misura l'angolo evidenziato?

Risposta: 90.
Svolgimento. Ognuno dei due rettangoli formati dai due quadrati accostati in orizzontale e dai due accostati in verticale può essere ottenuto ruotando l'altro di 90°. Allora anche le corrispondenti diagonali sono ruotate di 90°.

C2. (*7 punti*) 10 ciclisti terminano una gara con tempi di arrivo tutti diversi fra loro. Dopo qualche tempo, un giornalista chiede a ciascuno di loro di comunicargli il proprio ordine di arrivo in quella gara, ovviamente con un numero compreso fra 1 e 10. Il giornalista somma le risposte fornitegli ed ottiene 36. Ne deduce che certamente alcuni hanno mentito: quanti, almeno?

Risposta: 3.
Svolgimento. Se nessuno avesse mentito, la somma delle risposte sarebbe stata 55. Sommando addendi diversi non superiori a 10, l'unico modo di ottenere 55 – 36 = 19 con due addendi è 10 + 9. Se avessero mentito solo in due, dovrebbero essere allora gli ultimi due classificati, che avrebbero dovuto comunque dichiarare almeno 1: impossibile perché la somma dei primi 8 interi è proprio 36. Allora hanno mentito almeno in tre: ad esempio avrebbero potuto essere gli ultimi tre dichiarando 2, 3 e 3, addendi che sommati a 28 (la somma dei primi 7 interi) danno appunto 36.

C3. (*11 punti*) Dei triangoli ottenuti congiungendo tre vertici di uno stesso cubo, quanti sono equilateri?

Risposta: 8.

Svolgimento. Chiaramente non possono essere equilateri triangoli che abbiano fra i loro lati qualche spigolo del cubo. Resta allora l'unica possibilità che i lati siano diagonali di tre facce che condividano uno stesso vertice: ogni vertice individua una e una sola terna di tali facce e ogni terna uno e un solo triangolo equilatero.

C4. (*14 punti*) Considera la sequenza di interi i cui primi due termini sono, nell'ordine, 1007 e 10017 e ogni termine successivo è ottenuto dal precedente inserendo una ulteriore cifra 1 dopo le tre cifre iniziali 100 (dunque 1007, 10017, 100117, 1001117, …). Dimostra che ogni intero della sequenza è divisibile per 53.

Svolgimento. 1007 è divisibile per 53. La differenza fra due termini consecutivi della sequenza è del tipo 901×10^k per qualche intero positivo k, e 901 è divisibile per 53.
Oppure: 1007 è divisibile per 53; inoltre $10017 = 10070 - 53$ e per ogni altro termine della successione si ha che $100\underbrace{1 \ldots 1}_{n+1}7 = 100\underbrace{1 \ldots 1}_{n}70 - 53$.

C5. (*18 punti*) Per allenarsi, i 12 giocatori di una squadra di pallacanestro ogni giorno si ripartiscono in due squadre, ciascuna di 6 giocatori, che disputano una partita una contro l'altra. Qual è il minimo numero di partite che consente a ciascun giocatore di disputare almeno un incontro nella stessa squadra con ognuno degli altri?

Risposta: 3.
Svolgimento. È chiaro che due partite non bastano: ogni giocatore deve poter essere compagno di 11 giocatori diversi, e in due partite potrebbe esserlo solo di 10. Possiamo ripartire i giocatori a gruppi fissi di 3: il problema si può allora riesaminare pensando di avere 4 giocatori A, B, C, D e squadre da due. In questo caso è chiaro che tre partite sono sufficienti: basta considerare le coppie $\{A, B\}$ contro $\{C, D\}$, $\{A, C\}$ contro $\{B, D\}$ e $\{B, C\}$ contro $\{A, D\}$.

C6. (*22 punti*) Per quante coppie ordinate (m, n) di numeri interi positivi si ha

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2022}\ ?$$

Risposta: 27.
Svolgimento. L'uguaglianza proposta equivale a $2022(m + n) = mn$, cioè
$(m - 2022)(n - 2022) = 2022^2$. La fattorizzazione in primi di 2022^2 è $2^2 \times 3^2 \times 337^2$, dunque 2022^2 ammette 3^3 divisori diversi fra loro.