



Kangourou della Matematica 2021
finale nazionale italiana
Cervia, 25 settembre 2021



LIVELLO STUDENT

Tutte le risposte devono essere giustificate

S1. (5 punti) Osservando da lontano due sfere di raggi diversi, esse ti appaiono della stessa grandezza (come, ad esempio, potrebbe accadere per il sole e per la luna). Tuttavia, la distanza della più grande da te è 100 volte la distanza della più piccola (assumi che le distanze siano stimate tra te e i centri delle sfere). Quanto vale il rapporto fra il volume della più grande e il volume della più piccola?

Risposta: 1.000.000.

Soluzione. Per similitudine tra triangoli rettangoli, il raggio della sfera più grande deve essere 100 volte il raggio della sfera più piccola.

S2. (7 punti) Dieci recipienti, non necessariamente della stessa capacità, che possiamo considerare illimitata, contengono ciascuno acqua, non necessariamente nella stessa quantità. Effettuiamo dei travasi tra i recipienti; per ogni recipiente, ad ogni travaso, annotiamo la quantità di acqua immessa o prelevata. Ad esempio denotati i recipienti con A, B ecc. e usando sempre la stessa unità di misura potremmo avere un'annotazione come

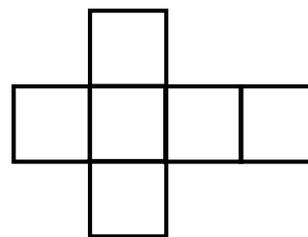
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
travaso 1	+1	0	0	0	0	0	0	0	0	-1

Al termine di queste operazioni si vuole ripristinare in ogni recipiente la quantità di acqua iniziale, minimizzando il numero di travasi. Adottando un'opportuna strategia, quanti travasi potranno essere necessari, al massimo?

Risposta: 9.

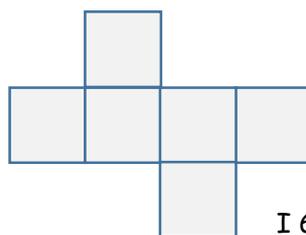
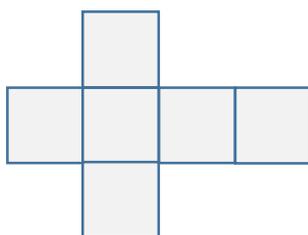
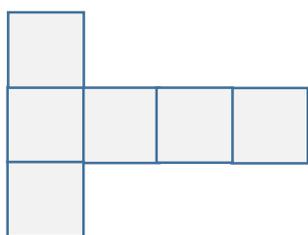
Soluzione. 9 travasi potrebbero essere necessari: ad esempio, potrebbe accadere che un solo recipiente si trovi ad avere più acqua di quella iniziale e tutti gli altri 9 di meno. Al più 9 travasi sono però sufficienti. Basta iniziare a travasare l'acqua in eccesso da un recipiente che ha il bilancio positivo in uno che ha il bilancio negativo (se vi sono bilanci positivi, ve ne devono essere di negativi, poiché la somma dei bilanci è 0), annotando la variazione di bilancio: a questo punto almeno un recipiente è tornato alla condizione iniziale. Si ripete ora la stessa operazione sui 9 recipienti restanti relativamente ai nuovi bilanci e quindi la si itera altre 7 volte. Poiché ad ogni passo la somma algebrica dei bilanci è 0, al termine tutti i recipienti saranno tornati alla condizione iniziale.

S3. (11 punti) In figura vedi uno sviluppo piano di un cubo, cioè un possibile accostamento in piano delle facce del cubo in modo da poter ricostruire il cubo piegando opportunamente la figura lungo i lati comuni a due facce. Quanti sviluppi piani diversi fra loro ha un cubo, considerando identici due sviluppi ottenibili uno dall'altro per rotazioni e/o riflessioni?

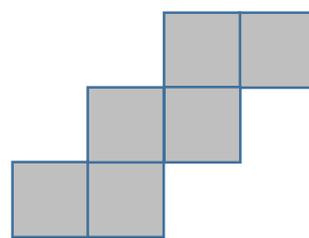
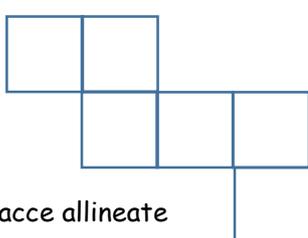
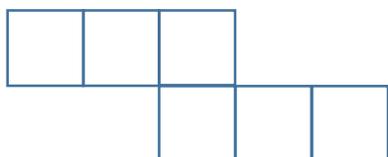
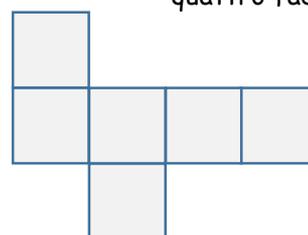
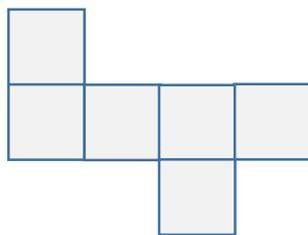
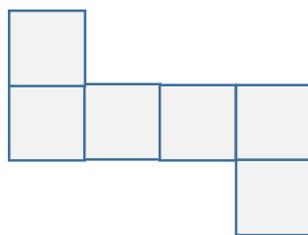


Risposta: 11.

Soluzione. Ovviamente non possono esserci sviluppi con 6 o 5 facce allineate. Considerati identici due sviluppi ottenibili uno dall'altro per rotazioni e/o riflessioni, ce ne sono 6 con quattro facce allineate, 4 con tre (ma non quattro) facce allineate, 1 con due (ma non tre) facce allineate. Questa argomentazione prova che non ci possono essere altri sviluppi.

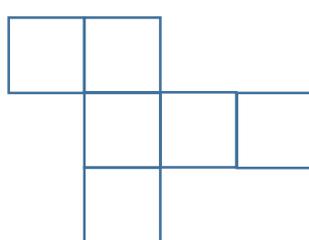
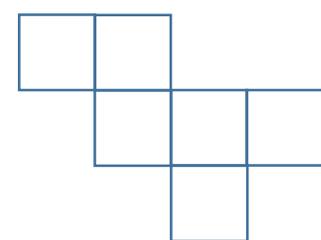


I 6 sviluppi con quattro facce allineate



I quattro sviluppi con 3 ma non 4 facce allineate

Lo sviluppo con due ma non tre facce allineate



S4. (14 punti) Hai una griglia rettangolare di m righe e n colonne e vuoi riempirla inserendo, uno per ogni casella, tutti numeri interi da 1 a $m \times n$ in modo che la somma dei numeri inseriti in ciascuna colonna sia sempre la stessa al variare delle colonne. Rispondi alle seguenti domande giustificando le tue risposte. Puoi riuscirci quando

a) $m = 2021$ e $n = 2020$?

b) $m = 2020$ e $n = 2021$?

Risposta: a) No; b) Sì.

Soluzione. a) Perché siano soddisfatte le richieste, la somma dei numeri che compaiono in ogni colonna dovrebbe essere

$$\frac{m \times n \times (m \times n + 1)}{2 \times n}$$

numero chiaramente non intero se m è dispari e n è pari.

b) Se invece m è pari l'operazione è sempre possibile: ad esempio basta disporre nella prima riga i primi n interi dispari a crescere e nell'ultima gli ultimi n interi pari a decrescere, nella seconda i primi n interi dispari non già inseriti a crescere e nella penultima gli ultimi n interi pari non già inseriti a decrescere e così via fino alle righe $m/2$ e $1 + m/2$. Infatti in questo modo su ogni colonna la somma dei 2 numeri contenuti nelle coppie di righe $(1, m), (2, m - 1), \dots, (m/2, 1 + m/2)$ è sempre $m \times n + 1$.

S5. (18 punti) Decidi se la seguente affermazione è vera o falsa, motivando la risposta.

"Assegnati n numeri reali positivi a_1, a_2, \dots, a_n , per ogni loro riordinamento b_1, b_2, \dots, b_n si ha $a_1/b_1 + a_2/b_2 + \dots + a_n/b_n \geq n$."

Risposta: VERA.

Soluzione. È sufficiente dimostrare che, per qualunque n -upla c_1, c_2, \dots, c_n di numeri positivi il cui prodotto sia 1, si ha $c_1 + c_2 + \dots + c_n \geq n$.

Procediamo per induzione su n . L'affermazione è vera per $n = 1$.

Siano ora $\{c_1, c_2, \dots, c_{n+1}\}$ $n + 1$ numeri positivi il cui prodotto sia 1. Senza ledere la generalità possiamo supporre che siano già ordinati in ordine crescente, dunque che si abbia

$$c_1 \leq 1 \text{ e } c_{n+1} \geq 1.$$

Per l'ipotesi di induzione si ha $c_2 + c_3 + \dots + c_n + c_{n+1} \times c_1 \geq n$, da cui

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \dots + c_n + c_{n+1} &\geq n + c_{n+1} + c_1 - c_{n+1} \times c_1 = n + c_{n+1}(1 - c_1) + c_1 - 1 + 1 = \\ &= n + 1 + (c_{n+1} - 1)(1 - c_1) \geq n + 1. \end{aligned}$$

S6. (22 punti) Dimostra che esiste un numero intero positivo divisibile per 2021 ed esprimibile, in notazione binaria significativa (cioè la prima cifra da sinistra non può essere 0), usando esattamente 2021 cifre zero e 2021 cifre uno.

Soluzione. In notazione binaria 2021 si scrive 1111100101, dunque usando otto cifre 1 e tre cifre 0: chiamiamolo allineamento A .

In notazione binaria il numero che si ottiene allineando $k + 1$ volte A è

$$2021 + 2021 \times 2^{11} + 2021 \times 2^{22} + \dots + 2021 \times 2^{k \times 11},$$

ovviamente divisibile per 2021; esso contiene $8(k + 1)$ cifre 1 e $3(k + 1)$ cifre 0.

Il numero di cifre 0 può essere aumentato a piacere senza modificare la divisibilità per 2021, poiché, aggiungendo n zeri alla destra di un allineamento, il numero corrispondente viene moltiplicato per 2^n .

Invece con la ripetizione dell'allineamento A non si riescono a inserire 2021 cifre zero poiché $2021 = 252 \times 8 + 5$. Quindi bisogna trovare un numero divisibile per 2021 che in notazione binaria contenga $5 + 8h$ cifre 1. Ad esempio il numero

$$11\ 111\ 100\ 101\ 000\ 000\ 000 + 11\ 111\ 100\ 101 = 11\ 111\ 101\ 000\ 111\ 100\ 101,$$

corrispondente a $2021 \times (2^9 + 1)$ e dunque divisibile per 2021, ha esattamente 13 cifre 1 e 7 cifre 0: chiamiamo B l'allineamento che esprime questo numero.

Allora uno dei numeri cercati è ottenibile in notazione binaria con l'allineamento che vede B seguito da 251 volte A e da $2021 - (251 \times 3 + 7) = 1261$ zeri corrispondente a

$$2021 \times 2^{1261} \times \{(2^9 + 1) \times 2^{2761} + 2^{250 \times 11} + 2^{249 \times 11} + \dots + 2^{2 \times 11} + 2^{1 \times 11} + 1\}.$$