Kangourou della Matematica 2021
finale nazionale italiana
Cervia, 25 settembre 2021

LIVELLO CADET

Tutte le risposte devono essere giustificate

C1. (*5 punti*) L'uguaglianza $25 \times 2 = 211$ è falsa, ma la puoi trasformare in un'uguaglianza corretta aggiungendo 1 ad alcune sue cifre e togliendo 1 alle altre. Scrivi questa nuova uguaglianza corretta, motivando.

Risposta: $34 \times 3 = 102$.
Soluzione. Per aver un numero di tre cifre bisogna aumentare di 1 tanto le decine del fattore 25 che le unità del fattore 2.
$35\times3=105$ mostra che bisogna anche diminuire di 1 le unità del fattore 25, diminuendo quindi di 1 le centinaia e le decine del risultato 211 e aumentando di 1 le unità sempre di 211: $34\times3=102$.

C2. (*7 punti*) Hai un sacchetto di coriandoli e vorresti sapere quanti sono, almeno approssimativamente. Pensi di usare la seguente strategia:

- ne estrai 50 e li contraddistingui con un segno, quindi li rimetti nel sacchetto e mescoli tutti i coriandoli in modo che quelli che hai contrassegnato si possano distribuire uniformemente all'interno del sacchetto;
- ne estrai quindi 70 a caso e scopri che, fra questi 70, solo due sono stati contrassegnati da te.

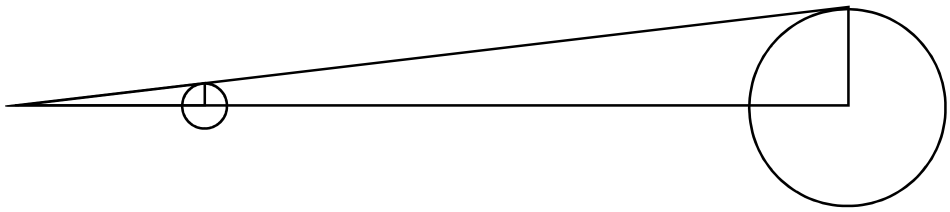
Sulla base di questo esperimento, qual è un numero attendibile per i coriandoli contenuti nel sacchetto?

Risposta: 1750.
Soluzione. Se i coriandoli contrassegnati si sono distribuiti in modo uniforme all'interno del sacchetto e l'estrazione è stata completamente casuale, ci si deve attendere che il rapporto fra 50 e il numero totale dei coriandoli contenuti sia identico al rapporto tra 2 e il numero (70) dei coriandoli estratti la seconda volta.

C3. (*11 punti*) Osservando da lontano due sfere di raggi diversi, esse ti appaiono della stessa grandezza (come, ad esempio, potrebbe accadere per il sole e per la luna). Tuttavia, la distanza della più grande da te è 100 volte la distanza della più piccola (assumi che le distanze siano stimate tra te e i centri delle sfere). Quanto vale il rapporto fra il volume della più grande e il volume della più piccola?

Risposta: 1.000.000.

Soluzione. Per similitudine tra triangoli rettangoli, il raggio della sfera più grande deve essere 100 volte il raggio della sfera più piccola.



C4. (*14 punti*) Considera l'insieme dei numeri interi da 2 a 2021 inclusi. Vuoi levarne alcuni in modo che nessuno di quelli rimasti sia esprimibile come prodotto di due di quelli rimasti. Quanti ti basta levarne, al minimo?

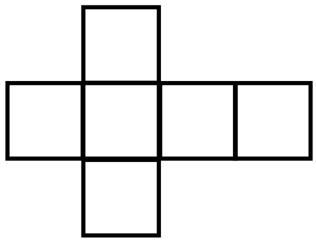
Risposta: 43.

Soluzione. Osserviamo che $1980 = 44 \times 45 \leq 2021 \leq 45 \times 46 = 2070$. Allora, basta togliere i 43 interi da 2 a 44 inclusi, poiché i due più piccoli rimasti (diversi da 1) sono 45 e 46 e il loro prodotto supera 2021. D'altra parte, va rimosso almeno un numero per ciascuna delle seguenti 43 terne a coppie disgiunte

$$(2, 87, 2\times 87), (3, 86, 3\times 86), \ldots, (44, 45, 44\times 45).$$

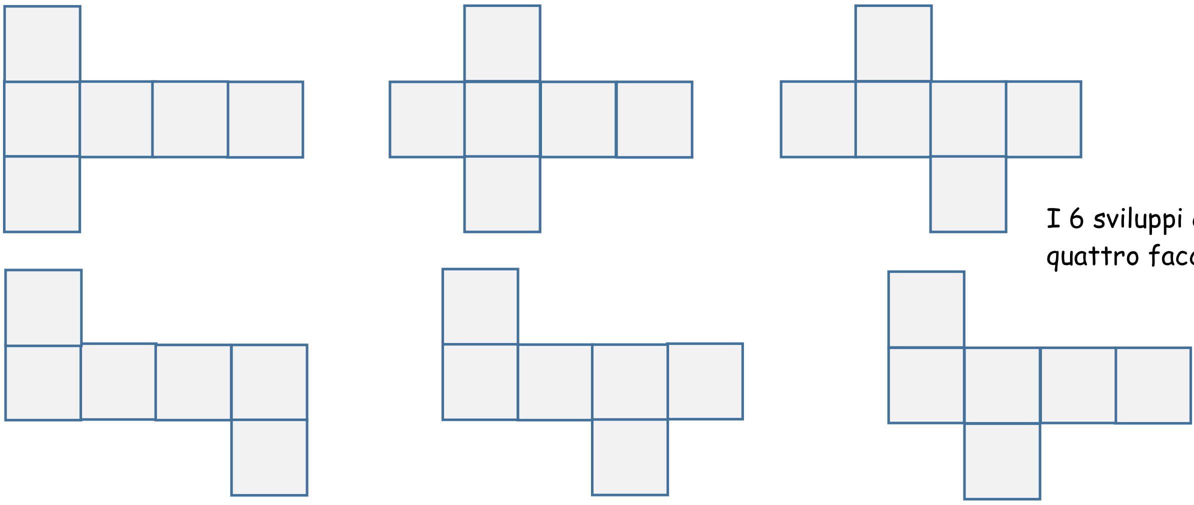
Infatti la presenza anche di una sola di queste terne violerebbe la richiesta.

C5. (*18 punti*) In figura vedi uno sviluppo piano di un cubo, cioè un possibile accostamento in piano delle facce del cubo in modo da poter ricostruire il cubo piegando opportunamente la figura lungo i lati comuni a due facce. Quanti sviluppi piani diversi fra loro ha un cubo, considerando identici due sviluppi ottenibili uno dall'altro per rotazioni e/o riflessioni?

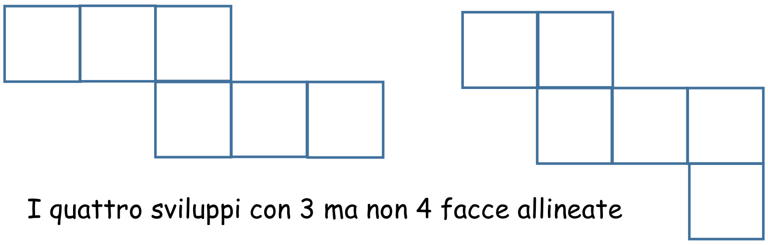


Risposta: 11.

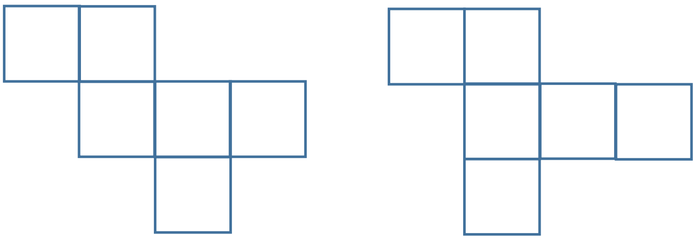
Soluzione. Ovviamente non possono esserci sviluppi con 6 o 5 facce allineate. Considerati identici due sviluppi ottenibili uno dall'altro per rotazioni e/o riflessioni, ce ne sono 6 con quattro facce allineate, 4 con tre (ma non quattro) facce allineate, 1 con due (ma non tre) facce allineate. Questa argomentazione prova che non ci possono essere altri sviluppi.

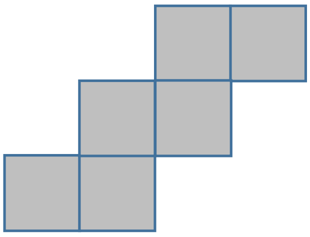


I 6 sviluppi con quattro facce allineate



I quattro sviluppi con 3 ma non 4 facce allineate





Lo sviluppo con due ma non tre facce allineate

C6. (*22 punti*) Hai una griglia rettangolare di m righe e n colonne e vuoi riempirla inserendo, uno per ogni casella, tutti numeri interi da 1 a $m \times n$ in modo che la somma dei numeri inseriti in ciascuna colonna sia sempre la stessa al variare delle colonne. Rispondi alle seguenti domande giustificando le tue risposte. Puoi riuscirci quando

- **a)** $m = 2021$ e $n = 2020$?
- **b)** $m = 2020$ e $n = 2021$?

Risposta: a) No; b) Sì.

Soluzione. a) Perché siano soddisfatte le richieste, la somma dei numeri che compaiono in ogni colonna dovrebbe essere

$$\frac{m \times n \times (m \times n + 1)}{2 \times n},$$

numero chiaramente non intero se m è dispari e n è pari.

b) Se invece m è pari l'operazione è sempre possibile: ad esempio basta disporre nella prima riga i primi n interi dispari a crescere e nell'ultima gli ultimi n interi pari a decrescere, nella seconda i primi n interi dispari non già inseriti a crescere e nella penultima gli ultimi n interi pari non già inseriti a decrescere e così via fino alle righe $m/2$ e $1 + m/2$. Infatti in questo modo su ogni colonna la somma dei 2 numeri contenuti nelle coppie di righe $(1, m)$, $(2, m - 1)$, …, $(m/2, 1 + m/2)$ è sempre $m \times n + 1$.