Kangourou della Matematica 2020
Coppa Junior a squadre
Finale
Online - 20 maggio 2020

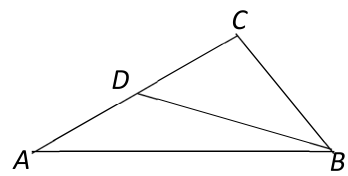
Quesiti

1. Lo sconto

La direzione di un museo, per avviare una campagna promozionale, intende concedere lo sconto del $k\%$ sul prezzo del biglietto di ingresso ai gruppi di k persone che acquisteranno un biglietto cumulativo. Non vuole però che l'entità dello sconto superi l'equivalente di 4 ingressi gratuiti per ogni gruppo di persone: deve quindi imporre la limitazione che k non superi un certo intero N. Qual è il valore più grande possibile di N?

2. Il quadrato

Nel triangolo in figura D è il punto medio del lato AC, gli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{DBC}$ sono uguali e il lato AB misura 12. Quanto vale il quadrato della misura del segmento BD?



3. I concorrenti

Una gara Kangourou consisteva di 12 domande numerate. Il rapporto inviato al responsabile ha fornito queste due informazioni:

- ogni partecipante ha risposto a tutte le domande;
- nessun partecipante ha dato la risposta giusta a due domande consecutive.

Il responsabile, senza conoscere i dettagli ma conoscendo il numero dei partecipanti, ne deduce che almeno due candidati hanno risposto allo stesso modo, cioè giusto alle stesse domande e sbagliato alle stesse domande.
Al minimo, quanti concorrenti hanno partecipato alla gara?

4. La casa abbattuta

In una lunga strada della mia città le case erano numerate, senza saltare alcun numero, dalla prima all'ultima. Un giorno una di queste case fu abbattuta. La media dei numeri rimanenti divenne allora 995,8. Qual era il numero della casa abbattuta?

5. Il più lungo

In un triangolo ABC la misura di AB è 123 quella di BC è 27 e quella di CA è 120. Considerate i due punti D e E che ripartiscono il lato AB in tre segmenti di uguale lunghezza. Qual è la lunghezza del più lungo tra i segmenti CD e CE? (*Rispondete scrivendo l'intero più vicino*).

6. Il mio avo

Il numero dell'anno di nascita di uno dei miei avi ha la seguente particolarità: è divisibile per 2, per 3 se gli si toglie 1, per 5 se gli si toglie 2, per 7 se gli si toglie 3 e per 11 se gli si toglie 4. Qual è l'anno di nascita del mio avo, sapendo che è stato sempre un buon cristiano?

7. Le coincidenze

Si considerino il numero (non intero) ottenuto dividendo 1990 per 19 e quello (anch'esso non intero) ottenuto dividendo 1990 per 17, entrambi scritti in notazione decimale. Si immagini poi di incolonnare i due numeri (con le due virgole in corrispondenza); se in una stessa posizione dopo la virgola entrambi i numeri presentano la cifra 5 diciamo che c'è una "coincidenza". Qual è la posizione, dopo la virgola, della 90-sima coincidenza? Scrivete 0000 se la 90-esima coincidenza non si verifica.

8. Tre parallele

È dato un quadrato $ABCD$. Tre rette a, b, c parallele fra loro passano rispettivamente per i vertici A, B e C del quadrato. La distanza di a da b è 7, mentre la distanza di b da c è 9. Quanto misura l'area del quadrato?

9. Divisori

Per un intero positivo n denotiamo con $d(n)$ il numero dei suoi divisori e con $s(n)$ la loro somma (ad esempio $d(8) = 4$ perché 8 ha 4 divisori (1, 2, 4, 8), mentre $s(8) = 15$). Determinare la somma di tutti gli interi n tali che $d(n) \times s(n) = 96$.

10. Numeri flessibili

Diciamo che un numero (intero positivo) AB di due cifre è *flessibile* se, quando viene sommato a $(A + B)^2$, cioè al quadrato della somma delle sue cifre, dà come risultato il numero BA. Quanto vale la somma di tutti i numeri flessibili?

11. Primi riordinati

Considerate i 9 più piccoli numeri interi primi di due cifre (significative). Un loro riordinamento si dice *ammissibile* se la differenza tra il maggiore e il minore di due suoi numeri consecutivi è una potenza di 2. Per ogni riordinamento ammissibile, sommate il primo e l'ultimo numero del riordinamento; sommate quindi tutte le somme così ottenute al variare di tutti i riordinamenti ammissibili. Che valore ottenete?

12. Le radici

Considerate tutte le soluzioni dell'equazione $x^6 - 16x^4 + 16x^2 = 1$ ed elevate alla sesta ciascuna di esse. Sommate quindi i risultati così ottenuti. Quanto ottenete?

13. Al casinò

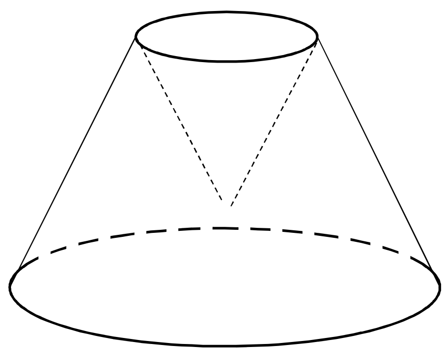
Martino gioca in un casinò. Ha messo a punto un metodo che consiste nel giocare 5 volte di fila un euro il primo giorno, 5 volte di fila 5 € il secondo giorno, 5 volte di fila 25 € il terzo giorno, 5 volte di fila 125 € il quarto giorno e così via continuando a moltiplicare per 5 la posta fino al settimo giorno. Se vince a un gioco, gli viene resa la puntata più 2 volte la puntata stessa mentre se perde, perde la puntata. Nessun giorno l'ha visto sempre vincere e nessun giorno l'ha visto sempre perdere. Dopo 7 giorni di gioco Martino ha guadagnato 22.066 €. Quante volte ha vinto in questi 7 giorni?

14. La media

Sia $S = \{1, 2, 3, \ldots, 100, 101\}$ l'insieme dei primi centouno numeri naturali. Quante terne $\{a, b, c\}$ con $a < c$ esistono in S tali che $b = (a + c)/2$?

15. Il cappello

Ho costruito un cappello di carta a forma di cono circolare retto, alto 32 cm. Ora rovescio la punta del cono al suo interno in modo che il bordo superiore che rimane visibile sia ancora una circonferenza (vedi figura). Quanti centimetri deve distare il piano di questa circonferenza dal piano di base del cono se voglio che il volume del solido compreso tra il piano di base e la superficie del cappello rovesciato sia i 3/4 di quello del cono originario?



Kangourou della Matematica 2020
Coppa Junior a squadre
Finale
Online - 20 maggio 2020

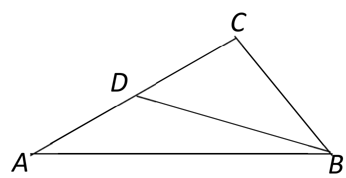
Quesiti e soluzioni

1. Lo sconto [0020]

La direzione di un museo, per avviare una campagna promozionale, intende concedere lo sconto del $k\%$ sul prezzo del biglietto di ingresso ai gruppi di k persone che acquisteranno un biglietto cumulativo. Non vuole però che l'entità dello sconto superi l'equivalente di 4 ingressi gratuiti per ogni gruppo di persone: deve quindi imporre la limitazione che k non superi un certo intero N. Qual è il valore più grande possibile di N?

Risposta: 0020.
Svolgimento. Se x è il costo intero dell'ingresso per una persona, deve essere $kx \times k/100 \leq 4x$.

2. Il quadrato [0072]



Nel triangolo in figura D è il punto medio del lato AC, gli angoli $\widehat{CAB}$ e $\widehat{DBC}$ sono uguali e il lato AB misura 12. Quanto vale il quadrato della misura del segmento BD?

Risposta: 0072.

Svolgimento. I triangoli ABC e BDC sono simili. Quindi risulta $\frac{\overline{BD}}{12} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$ cioè, dato che la lunghezza di AC è il doppio di quella di DC, $\frac{\overline{BD}^2}{144} = \frac{\overline{DC}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{1}{2}$.

3. I concorrenti [0378]

Una gara Kangourou consisteva di 12 domande numerate. Il rapporto inviato al responsabile ha fornito queste due informazioni:
- ogni partecipante ha risposto a tutte le domande;
- nessun partecipante ha dato la risposta giusta a due domande consecutive.

Il responsabile, senza conoscere i dettagli ma conoscendo il numero dei partecipanti, ne deduce che almeno due candidati hanno risposto allo stesso modo, cioè giusto alle stesse domande e sbagliato alle stesse domande.
Al minimo, quanti concorrenti hanno partecipato alla gara?

Risposta 0378.
Svolgimento. Si tratta di aggiungere 1 al numero di sequenze ordinate di 0 e 1 aventi lunghezza 12 in cui non esistono due 1 consecutivi. Il numero di tali sequenze è il 12-mo numero di Fibonacci:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

Infatti il numero di sequenze ordinate di 0 e 1 aventi lunghezza n in cui non esistono due 1 consecutivi può essere calcolato ricorsivamente così:
$n = 1$: l'insieme delle sequenze è formato da due elementi $L_1 = \{(0), (1)\}$
$n = 2$: l'insieme delle sequenze è formato da tre elementi $L_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0)\}$

$n = 3$: L_3 è ottenuto o premettendo 0 alle sequenze di L_2 o premettendo 1,0 alle sequenze di L_1

$$L_3 = 0L_2 \cup 10L_1 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0); (1,0,0), (1,0,1)\}$$

$n = 4$: L_4 è ottenuto o premettendo 0 alle sequenze di L_3 o premettendo 1,0 alle sequenze di L_2

$$L_4 = 0L_3 \cup 10L_2 = \{(0,0,0,0), (0,0,0,1), (0,0,1,0)\ (0,1,0,0), (0,1,0,1); (1,0,0,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0)\}$$

E in generale $L_n = 0L_{n-1} \cup 10L_{n-2}$.

4. La casa abbattuta [1394]

In una lunga strada della mia città le case erano numerate, senza saltare alcun numero, dalla prima all'ultima. Un giorno una di queste case fu abbattuta. La media dei numeri rimanenti divenne allora 995,8. Qual era il numero della casa abbattuta?

Risposta: 1394.

Svolgimento. Supponiamo che i numeri prima dell'abbattimento siano N e che la casa abbattuta sia quella col numero K. Allora la media dopo l'abbattimento è espressa da:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N-1} i + N - K}{N-1} = \frac{N}{2} + \frac{N-K}{N-1} = 995{,}8$$

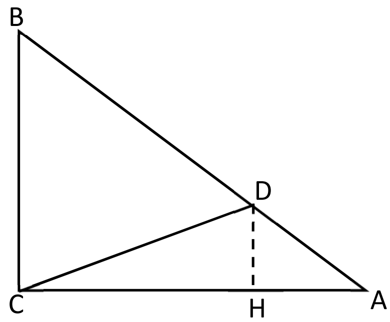
Il secondo addendo è strettamente minore di 1 (è escluso che sia 1 poiché questo implicherebbe che N non è intero) e quindi, se N è pari cioè N=1990, vale 0,8 mentre, se N è dispari, cioè N=1991, vale 0,3. Sostituendo si ha, nel primo caso 1990 – K = 0,8×1989, che è impossibile poiché K è intero, nel secondo caso 1991 – K = 0,3×1990, cioè K = 1991 – 597 = 1394.

5. Il più lungo [0081]

In un triangolo ABC la misura di AB è 123 quella di BC è 27 e quella di CA è 120. Considerate i due punti D e E che ripartiscono il lato AB in tre segmenti di uguale lunghezza. Qual è la lunghezza del più lungo tra i segmenti CD e CE? (*Rispondete scrivendo l'intero più vicino*).

Risposta: 0081.

Svolgimento. Il triangolo ABC è rettangolo. Se D è più vicino ad A di E, CD è più lungo di CE. Detto H il piede della perpendicolare da D ad AC, il triangolo ADH è simile al triangolo ABC e quindi DH misura 9 e CH misura 80, per cui (Pitagora) CD misura $\sqrt{80^2 + 9^2} = \sqrt{6.481}$. Si ha $80{,}5^2 = 6480{,}25 < 6.481 < 81^2$.



6. Il mio avo [1522]

Il numero dell'anno di nascita di uno dei miei avi ha la seguente particolarità: è divisibile per 2, per 3 se gli si toglie 1, per 5 se gli si toglie 2, per 7 se gli si toglie 3 e per 11 se gli si toglie 4. Qual è l'anno di nascita del mio avo, sapendo che è stato sempre un buon cristiano?

Risposta: 1522.

Svolgimento. Le condizioni si possono tradurre con quattro equazioni diofantee, da risolvere in sequenza; è sottointeso che tutte le lettere denotano numeri interi positivi e vengono via via abbandonate le equazioni che non sono più necessarie alla determinazione dell'anno:

$$\begin{cases} 2h = 1 + 3k \\ 2h = 2 + 5j \\ 2h = 3 + 7m \\ 2h = 4 + 11n \end{cases} \qquad \begin{cases} h = 2 + 3b \\ k = 1 + 2b \\ 5j = 2 + 6b \\ 7m = 1 + 6b \\ 11n = 6b \end{cases} \qquad \begin{cases} h = 2 + 3b \\ k = \\ 5j = 2 + 6b \\ 7m = 1 + 6b \\ b = 11c \\ n = 6c \end{cases} \qquad \begin{cases} h = 2 + 33c \\ k = \\ 5j = 2 + 66c \\ 7m = 1 + 66c \\ b = 11c \\ n = \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = 2+33c \\ k = \\ c = 3+5d \\ j = 40+66d \\ 7m = 1+66c \\ b = \\ n = \end{cases} \qquad \begin{cases} h = 101+165d \\ k = \\ c = 3+5d \\ j = \\ 7m = 199+330d \\ b = \\ n = \end{cases} \qquad \begin{cases} h = 101+165d \\ k = \\ c = \\ j = \\ d = 4+7f \\ m = 217+330f \\ b = \\ n = \end{cases}$$

Per $f = 1$ si ha $h = 101 + 660 = 761$ e quindi $2h = 1522$ e non ci sono altre soluzioni poiché per ogni altro valore di f il valore di $2h$ supera 2020.

7. Le coincidenze [6471]

Si considerino il numero (non intero) ottenuto dividendo 1990 per 19 e quello (anch'esso non intero) ottenuto dividendo 1990 per 17, entrambi scritti in notazione decimale. Si immagini poi di incolonnare i due numeri (con le due virgole in corrispondenza); se in una stessa posizione dopo la virgola entrambi i numeri presentano la cifra 5 diciamo che c'è una "coincidenza". Qual è la posizione, dopo la virgola, della 90-sima coincidenza? Scrivete 0000 se la 90-esima coincidenza non si verifica.

Risposta: 6471.

Svolgimento. È facile verificare che $X = \frac{1990}{19} = 104,\overline{736842105269157894}$ (periodo lungo 18) e che $Y = \frac{1990}{17} = 117,\overline{0588235294117647}$ (periodo lungo 16).

In X i 5 sono in posizione $9 + 18k$ e $14 + 18k$ (con k intero non negativo); in Y i 5 sono in posizione $2 + 16h$ e $7 + 16h$ (con h intero non negativo): si tratta di vedere quando queste posizioni coincidono. Ovviamente non può essere $9 + 18k = 2 + 16h$, né $14 + 18k = 7 + 16h$; le altre due uguaglianze danno:

$9 + 18k = 7 + 16h \rightarrow 8h - 9k = 1$, cioè $(h, k) = (8 + 9t, 7 + 8t)$ con t intero non negativo

$14 + 18k = 2 + 16h \rightarrow 8h - 9k = 6$, cioè $(h, k) = (3 + 9s, 2 + 8s)$ con s intero non negativo

che costituiscono due soluzioni distinte del problema poiché se coincidessero $8 - 3 = 7 - 2$ dovrebbe essere divisibile per 9. Quindi si alternano soluzioni del tipo

$2 + 16h = 2 + 16(3 + 9s) = 50 + 144\,s$ e $7 + 16h = 7 + 16(8 + 9s) = 135 + 144\,s$.

Dopo la seconda coincidenza, in posizione 135, ogni altra coppia di coincidenze è posta a 144 posizioni dalle precedenti e quindi si devono aggiungere $144\times 44 = 6336$ posizioni.

$6336 + 135 = 6471$.

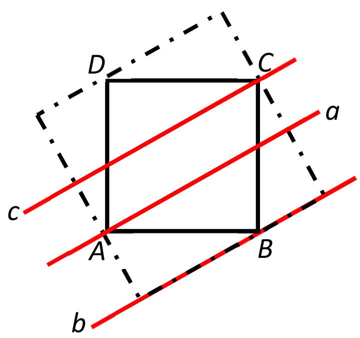
8. Tre parallele [0130]

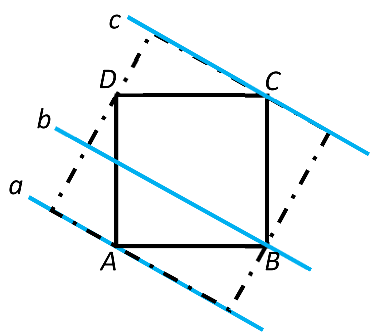
È dato un quadrato $ABCD$. Tre rette a, b, c parallele fra loro passano rispettivamente per i vertici A, B e C del quadrato. La distanza di a da b è 7, mentre la distanza di b da c è 9. Quanto misura l'area del quadrato?

Risposta: 0130.

Svolgimento. Sia nel caso in cui a e c attraversano $ABCD$ sia in quello in cui gli sono esterne (come suggerito dai due disegni), il quadrato $ABCD$ può essere inscritto in un quadrato, di lato 9+7, avente almeno un lato su una delle tre rette. I 4 triangoli rettangoli ritagliati da $ABCD$ nel quadrato circoscritto sono congruenti e quindi l'area di $ABCD$ è

$(9 + 7)^2 - 2 \times 9 \times 7 = 81 + 49$.





9. Divisori [0076]

Per un intero positivo n denotiamo con $d(n)$ il numero dei suoi divisori e con $s(n)$ la loro somma (ad esempio $d(8) = 4$ perché 8 ha 4 divisori (1, 2, 4, 8), mentre $s(8) = 15$). Determinare la somma di tutti gli interi n tali che $d(n) \times s(n) = 96$.

Risposta: 0076.
Svolgimento. Tra i divisori di 96, quelli che possono corrispondere a $d(n)$ sono solo:

- 2 cioè n numero primo e quindi $2\times(n + 1) = 96$, che implica $n = 47$
- 4, cioè $n = p\times q$ con p e q numeri primi e quindi $4\times(p+1)(q+1) = 96$, che implica $n = 14$ oppure $n = 15$.

Infatti non può essere $d(n) = 3$, poiché significa $n = p^2$ con p primo e $p^2 + p + 1$ non può valere 32, né $d(n) \geq 6$ poiché il più piccolo n con $d(n) = 6$ è 12 e già in tal caso $s(n) = 28$.

10. Numeri flessibili [0027]

Diciamo che un numero (intero positivo) AB di due cifre è *flessibile* se, quando viene sommato a $(A + B)^2$, cioè al quadrato della somma delle sue cifre, dà come risultato il numero BA. Quanto vale la somma di tutti i numeri flessibili?

Risposta: 0027.
Svolgimento. Si ottiene subito che deve essere $(A + B)^2 = 9(B - A)$. Poiché $B - A$ non supera 9, il valore dei due membri deve essere un quadrato divisibile per 9, dunque solo 9 o 36 o 81. 9 fornisce $AB = 12$, 36 fornisce $AB = 15$, 81 fornisce $AB = 09$ non accettabile.

11. Primi riordinati [0220]

Considerate i 9 più piccoli numeri interi primi di due cifre (significative). Un loro riordinamento si dice *ammissibile* se la differenza tra il maggiore e il minore di due suoi numeri consecutivi è una potenza di 2. Per ogni riordinamento ammissibile, sommate il primo e l'ultimo numero del riordinamento; sommate quindi tutte le somme così ottenute al variare di tutti i riordinamenti ammissibili. Che valore ottenete?

Risposta: 0220.
Svolgimento. I 9 numeri primi sono: 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37 e 41. Le potenze di 2 che possono costituire le differenze sono solo 2, 4, 8 e 16 (poiché $41 - 11 < 32$). Dal momento che 41 è connettibile solo a 37 e 37 a 29, ogni riordinamento ammissibile deve iniziare con 41, 37, 29 o terminare con questa sequenza invertita. Iniziamo con 41, 37 e 29. Se si prosegue con 31, si deve continuare poi con 23 e 19, e poi con 17, 13 e 11 oppure con 11, 13 e 17. Due possibilità che, con le loro rovesciate, forniscono quattro riordinamenti ammissibili.
Dopo 29 si potrebbe però a prima vista proseguire con 13, che comporterebbe continuare con 11 o 17. In entrambi i casi si dovrebbe poi piazzare 19 seguito da quello non utilizzato tra 11 e 17, che non consentirebbero di piazzare 23 o 31, oppure da 23 e 31 che non consentirebbero di piazzare il rimanente tra 11 e 17. Dunque, se dopo 29 si prosegue con 13, non si può concludere.

12. Le radici [6662]

Considerate tutte le soluzioni dell'equazione $x^6 - 16x^4 + 16x^2 = 1$ ed elevate alla sesta ciascuna di esse. Sommate quindi i risultati così ottenuti. Quanto ottenete?

Risposta: 6662.
Svolgimento. L'equazione coincide con $(x^2 - 1)(x^4 - 15x^2 + 1) = 0$. Il secondo fattore ha radici $x^2 = (a \pm b)/2$ con $a = 15$ e $b = \sqrt{221}$. Allora le soluzioni sono 6 e la somma delle loro seste potenze è $2 + 2[(a + b)/2]^3 + 2[(a - b)/2]^3 = 2 + (a^3 + 3ab^2)/2$.

13. Al casinò [0020]

Martino gioca in un casinò. Ha messo a punto un metodo che consiste nel giocare 5 volte di fila un euro il primo giorno, 5 volte di fila 5 € il secondo giorno, 5 volte di fila 25 € il terzo giorno, 5 volte di fila 125 € il quarto giorno e così via continuando a moltiplicare per 5 la posta fino al settimo giorno. Se vince a un gioco, gli viene resa la puntata più 2 volte la puntata stessa mentre se perde, perde la puntata. Nessun giorno l'ha visto sempre vincere e nessun giorno l'ha visto sempre perdere. Dopo 7 giorni di gioco Martino ha guadagnato 22066 €. Quante volte ha vinto in questi 7 giorni?

Risposta: 0015.

Svolgimento. Osserviamo che, per ogni $k \in \{1, \ldots, 7\}$, al giorno k il valore di ogni puntata è 5^{k-1} e il capitale giocato è 5^k, per cui in totale il capitale giocato è $5 \times (5^7 - 1)/4 = 97655$.

Se nel singolo giorno realizza x_k ($1 \leq x_k \leq 4$) vittorie, il guadagno deve essere uguale a:

$$\sum_{k=1}^{7} [2x_k - (5 - x_k)]\, 5^{k-1} = 3\sum_{k=1}^{7} [x_k 5^{k-1}] - \sum_{k=1}^{7} 5^k$$

quindi $3\sum_{k=1}^{7}[x_k 5^{k-1}] = 97655 + 22066 = 119721$

cioè $\sum_{k=1}^{7}[x_k 5^{k-1}] = 39907$.

Ora dividiamo successivamente per 5 questo numero per ottenere i valori degli x_k:

$39907 = 2 + 5 \times 7981 = 2 + 5 \times (1 + 5 \times 1596) = 2 + 5 \times (1 + 5 \times (1 + 5 \times 319)) =$

$= 2 + 5 \times (1 + 5 \times (1 + 5 \times (4 + 5 \times 63))) = 2 + 5 \times (1 + 5 \times (1 + 5 \times (4 + 5 \times (3 + 5 \times 12)))) =$

$= 2 + 5 \times (1 + 5 \times (1 + 5 \times (4 + 5 \times (3 + 5 \times (2 + 5 \times 2))))) =$

$= 2 + 1 \times 5 + 1 \times 5^2 + 4 \times 5^3 + 3 \times 5^4 + 2 \times 5^5 + 2 \times 5^6$.

Il numero di vittorie è quindi $2 + 1 + 1 + 4 + 3 + 2 + 2 = 15$.

14. La media [2500]

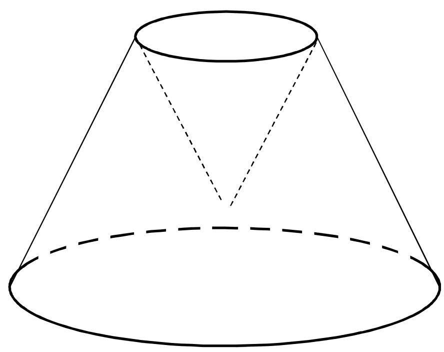
Sia $S = \{1, 2, 3, \ldots, 100, 101\}$ l'insieme dei primi centouno numeri naturali. Quante terne $\{a, b, c\}$ con $a < c$ esistono in S tali che $b = (a + c)/2$?

Risposta: 2500.

Svolgimento. Le terne soluzione sono quante le coppie di numeri a somma pari:

$$\binom{50}{2} + \binom{51}{2} = \frac{49\times 50 + 51\times 50}{2} = 2500.$$

15. Il cappello [0016]



Ho costruito un cappello di carta a forma di cono circolare retto, alto 32 cm. Ora rovescio la punta del cono al suo interno in modo che il bordo superiore che rimane visibile sia ancora una circonferenza (vedi figura). Quanti centimetri deve distare il piano di questa circonferenza dal piano di base del cono se voglio che il volume del solido compreso tra il piano di base e la superficie del cappello rovesciato sia i 3/4 di quello del cono originario?

Risposta: 0016.

Svolgimento. Chiamiamo R il raggio della circonferenza di base e r quello della circonferenza superiore, h l'altezza del cono iniziale, x l'altezza del conetto che viene ribaltato: per proporzionalità $x = rh/R$. Quindi il volume del cono grande è $\pi R^2 h/3$, quello del conetto è $\pi r^3 h/3R$.

Se quel che rimane, ribaltato il conetto, è i 3/4 del cono grande si deve avere $\pi R^2 h/12 = 2\pi r^3 h/3R$, cioè $R^3 = 8\, r^3$; quindi $r = R/2$ e anche $x = h/2$.