



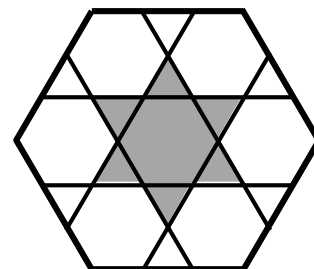
Kangourou della Matematica 2020  
Coppa Kangourou a squadre  
Finale  
Online - 19 maggio 2020



## Quesiti

### 1. Frazione ombreggiata

Ciascuno dei lati di un esagono regolare è stato suddiviso in tre segmenti di uguale lunghezza. I punti di suddivisione sono stati collegati a coppie da segmenti come mostra la figura. Quale frazione dell'esagono è ombreggiata? (*Utilizzate le prime due cifre da sinistra per il numeratore, le altre per il denominatore: ad esempio, per  $3/5$  scrivete 0305.*)



### 2. Al posto 2020

Qual è il numero al posto 2020 della sequenza 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 7, ... dove compaiono tutti e soli i numeri interi dispari, in ordine crescente e ciascuno un numero di volte uguale a se stesso?

### 3. L'indovinello

Carla ha 100 fogliettini: su ognuno di essi è scritto un numero che può essere solo 1 o -1. Carla chiede a Dario di indovinare la somma (algebrica) di tutti i numeri che compaiono sui suoi 100 fogliettini. Tra quanti numeri è costretto ad indovinare Dario?

### 4. Dispari contro pari

Dall'insieme di tutti i numeri interi tra 1000 e 9999 inclusi, immagina di selezionare il sottoinsieme  $D$  di quelli le cui cifre sono tutte dispari e il sottoinsieme  $P$  di quelli le cui cifre sono tutte pari. Ora immagina di sommare tutti i numeri in  $D$  e, separatamente, tutti i numeri in  $P$ . Quali sono le prime quattro cifre da sinistra della differenza fra le due somme?

### 5. Gli alberi

A marzo 2017 lungo un viale sono stati piantati degli alberi, molto distanziati. Nel marzo 2018, fra ogni due adiacenti di essi ne è stato piantato un altro. La stessa operazione si è ripetuta a marzo nei due anni successivi. A oggi gli alberi piantati a partire da marzo 2017 sono 81 (oltre a quelli di cui stiamo parlando, non ne sono stati piantati altri). Quanti alberi sono stati piantati a marzo 2017?

### 6. A teatro

In un teatro ci sono più di 1000 spettatori, ma meno di 1500. Se vengono ripartiti in gruppi di 2 persone, oppure di 3, oppure di 4, oppure di 5, oppure di 6, rimane fuori sempre esattamente uno spettatore. Se invece vengono ripartiti in gruppi di 7 persone non rimane fuori nessuno. Quanti spettatori ci sono?

### 7. Il triangolo più grande

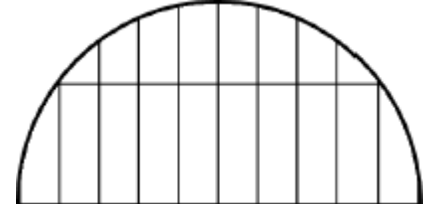
È possibile ottenere un triangolo equilatero di lato 3 cm accostando 9 triangoli equilateri ciascuno di lato 1 cm. Accostando con lo stesso criterio un maggior numero di triangoli equilateri, ciascuno di lato 1, si possono ottenere triangoli equilateri più grandi. Volete ricoprire con un filo rigido tutti i segmenti che appaiono nella figura ottenuta, ma avete a disposizione solo 2020 cm di filo (che, se necessario, può essere tagliato). Quanti centimetri è lungo il lato del più grande triangolo su cui potete fare questa operazione?

## 8. Gettoni

Su una scacchiera rettangolare  $100 \times 50$  sono disposti 5000 gettoni, uno su ciascuna casella. Ogni gettone ha una faccia nera e una rossa e in questo momento tutti i gettoni mostrano la faccia nera. Il gioco consiste nel ribaltare dei gettoni facendo in modo che appaia un numero di facce rosse prefissato. Unica regola: per ribaltare un gettone bisogna ribaltare la totalità dei gettoni della riga o, a scelta, della colonna cui il gettone appartiene. Si possono ribaltare tutte le linee che si vuole, tante volte quante si desidera. Qual è il numero minimo di ribaltamenti di linee che permette di vedere esattamente 2020 gettoni rossi?

## 9. La vetrata

La figura ti mostra lo schema di una finestra semicircolare chiusa con una vetrata, costituita dalle lastre di vetro che vengono evidenziate. Le basi (lati orizzontali) delle lastre hanno tutte la stessa lunghezza, un decimo del diametro che misura 250 centimetri. Quanti centimetri misura l'altezza di ognuna delle lastre rettangolari?



## 10. L'età di Sofia

Sofia ha fatto un calcolo: se moltiplica l'età (in anni) che aveva 55 anni fa per l'età che avrebbe fra 55 anni se fosse ancora viva, ottiene un numero che è il cubo di un numero primo. Quanti anni ha Sofia?

## 11. Somma di cubi

Due numeri interi positivi  $a$  e  $b$  sono tali che  $a^3 - b^3 = 485$ . Quanto vale  $a^3 + b^3$ ?

## 12. Sandro il pasticcione

Sei numeri interi erano scritti in progressione aritmetica (cioè la differenza di ciascuno, a parte il primo, con il precedente era sempre la stessa). Nel ricopiarli, Sandro il pasticcione non solo ne ha dimenticato uno, ma ne ha anche sbagliato un altro. Così ha scritto: 11, 25, 32, 37, 46. Qual è la somma dei due numeri della progressione iniziale che Sandro ha sbagliato o dimenticato?

## 13. Bigliettini

Per identificare ogni partecipante ad una gara vengono usati bigliettini rettangolari. Una faccia è grigia, uguale per tutti; l'altra è ripartita in 5 quadrati (congruenti) allineati che possono venire colorati avendo a disposizione 4 colori diversi; questi colori possono venire impiegati in qualunque posizione, anche solo in parte (ad esempio, è possibile che in un bigliettino venga impiegato un solo colore). Non vi sono altri segni distintivi sui bigliettini. Quanti partecipanti possono essere ammessi, al massimo?

## 14. Il bottino

Un bottino di guerra di 44.100 monete d'oro viene ripartito in sacchetti: uno di 1, uno di 3, uno di 5, uno di 7 monete ... e così via. Uno dei sacchetti viene poi riposto in una cassaforte, due dei rimanenti insieme in un'altra cassaforte, tre dei rimanenti insieme in una terza cassaforte e così via. Quante sono, in totale, le casseforti impiegate?

## 15. Rose e tulipani

Un politico organizza una festa in una enorme piazza dove sono disposte in cerchio 2020 sedie. Il politico sa che tutte le sedie verranno occupate e che i partecipanti si siederanno in modo che ogni donna abbia a fianco almeno un uomo. Decide di regalare ad ogni donna una rosa e ad ogni uomo un tulipano, che ordinerà ad un fiorista una volta che le sedie verranno occupate. Una rosa gli costa 3 euro, un tulipano 2 euro. Qual è la spesa massima in euro che potrebbe dover sostenere?



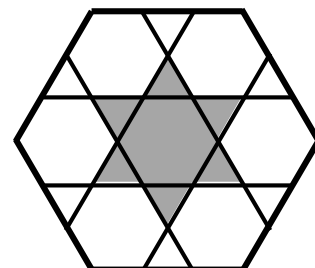
Kangourou della Matematica 2020  
Coppa Kangourou a squadre  
Finale  
Online - 19 maggio 2020



## Quesiti e soluzioni

### 1. Frazione ombreggiata

Ciascuno dei lati di un esagono regolare è stato suddiviso in tre segmenti di uguale lunghezza. I punti di suddivisione sono stati collegati a coppie da segmenti come mostra la figura. Quale frazione dell'esagono è ombreggiata? (Utilizzate le prime due cifre da sinistra per il numeratore, le altre per il denominatore: ad esempio, per  $3/5$  scrivete 0305.)



**Risposta: 0209.**

**Svolgimento.** Ogni triangolo "piccolo" ha area un sesto di ogni esagono "piccolo".

### 2. Al posto 2020

Qual è il numero al posto 2020 della sequenza 1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 7, 7, ... dove compaiono tutti e soli i numeri interi dispari, in ordine crescente e ciascuno un numero di volte uguale a se stesso?

**Risposta: 0089.**

**Svolgimento.** Immaginiamo di inserire tutti i numeri dispari della sequenza in un quadrante quadrettato, illimitato verso l'alto e verso destra, nel seguente modo: mettiamo 1 nel quadretto di vertice (in basso a sinistra), i tre 3 in modo da "contornare" il quadretto con 1, i cinque 5 in modo da "contornare" il quadrato  $2 \times 2$  appena riempito, e così via. Si ha  $44^2 < 2020 < 2025 = 45^2$ . Quindi al posto 2020 c'è il 45-esimo numero dispari.

### 3. L'indovinello

Carla ha 100 fogliettini: su ognuno di essi è scritto un numero che può essere solo 1 o -1. Carla chiede a Dario di indovinare la somma (algebrica) di tutti i numeri che compaiono sui suoi 100 fogliettini. Tra quanti numeri è costretto ad indovinare Dario?

**Risposta: 0101.**

**Svolgimento.** Se tutti i numeri sono 1 la somma è 100. Sostituendo su  $n$  fogliettini  $-1$  a 1, la somma diventa  $100 - 2n$ . Con  $n$  intero variabile da 0 a 100 si esauriscono tutti casi possibili.

### 4. Dispari contro pari

Dall'insieme di tutti i numeri interi tra 1000 e 9999 inclusi, immagina di selezionare il sottoinsieme  $D$  di quelli le cui cifre sono tutte dispari e il sottoinsieme  $P$  di quelli le cui cifre sono tutte pari. Ora immagina di sommare tutti i numeri in  $D$  e, separatamente, tutti i numeri in  $P$ . Quali sono le prime quattro cifre da sinistra della differenza fra le due somme?

**Risposta: 7498.**

**Svolgimento.**  $P$  contiene  $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$  numeri e si immerge in  $D$  sommando 1 ad ogni cifra di ogni suo numero. Oltre all'immagine di  $P$ , costituita da  $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$  numeri, ciascuno aumentato di 1111 rispetto alla sua contro-immagine, in  $D$  ci sono i 125 numeri della forma  $1 \times 1000 + A \times 100 + B \times 10 + C$  con  $A, B$  e  $C$  cifre dispari.

La somma delle cifre dispari è  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$  e quindi la somma dei 125 numeri vale  $125 \times 1000 + (25 \times 100 + 25 \times 10 + 25 \times 1) \times 25 = 125 \times 1555$  che sommato a  $125 \times 4 \times 1111$  dà 749.875.

## 5. Gli alberi

A marzo 2017 lungo un viale sono stati piantati degli alberi, molto distanziati. Nel marzo 2018, fra ogni due adiacenti di essi ne è stato piantato un altro. La stessa operazione si è ripetuta a marzo nei due anni successivi. A oggi gli alberi piantati a partire da marzo 2017 sono 81 (oltre a quelli di cui stiamo parlando, non ne sono stati piantati altri). Quanti alberi sono stati piantati a marzo 2017?

**Risposta: 0011.**

**Svolgimento.** Se nel 2017 sono stati piantati  $n$  alberi, gli alberi presenti oggi sono

$$n + (n - 1) + (2n - 2) + (4n - 4) = 8n - 7.$$

## 6. A teatro

In un teatro ci sono più di 1000 spettatori, ma meno di 1500. Se vengono ripartiti in gruppi di 2 persone, oppure di 3, oppure di 4, oppure di 5, oppure di 6, rimane fuori sempre esattamente uno spettatore. Se invece vengono ripartiti in gruppi di 7 persone non rimane fuori nessuno. Quanti spettatori ci sono?

**Risposta: 1141.**

**Svolgimento.** Se  $n$  è il numero degli spettatori,  $n - 1$  deve essere divisibile per tutti gli interi fino a 6: questo capita se e solo se  $n - 1$  è divisibile per 60. Allora  $n$  deve essere un multiplo di 60 che, aumentato di 1, dia un numero divisibile per 7: il primo valore possibile è 301; ad esso va aggiunto un multiplo di 420 in modo che la somma sia un numero compreso tra 1000 e 1500.

## 7. Il triangolo più grande

È possibile ottenere un triangolo equilatero di lato 3 cm accostando 9 triangoli equilateri ciascuno di lato 1 cm. Accostando con lo stesso criterio un maggior numero di triangoli equilateri, ciascuno di lato 1, si possono ottenere triangoli equilateri più grandi. Volete ricoprire con un filo rigido tutti i segmenti che appaiono nella figura ottenuta, ma avete a disposizione solo 2020 cm di filo (che, se necessario, può essere tagliato). Quanti centimetri è lungo il lato del più grande triangolo su cui potete fare questa operazione?

**Risposta: 0036.**

**Svolgimento.** Il primo livello" richiede 3 segmenti, il secondo richiede di aggiungerne 6, il terzo 9 e così via. Dopo  $n$  "livelli" avrò tracciato  $3(1 + 2 + \dots + n) = 3n(n+1) / 2$  segmenti. Con qualche tentativo mirato si ottiene subito che il più grande valore intero di  $n$  per cui risulta  $n^2 + n < 4040/3 = 1346 + 2/3$  è 36.

## 8. Gettoni

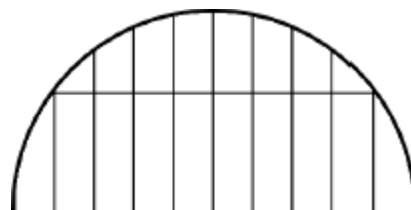
Su una scacchiera rettangolare  $100 \times 50$  sono disposti 5000 gettoni uno su ciascuna casella. Ogni gettone ha una faccia nera e una rossa e in questo momento tutti i gettoni mostrano la faccia nera. Il gioco consiste nel ribaltare dei gettoni facendo in modo che appaia un numero di facce rosse prefissato. Unica regola: per ribaltare un gettone bisogna ribaltare la totalità dei gettoni della riga o, a scelta, della colonna cui il gettone appartiene. Si possono ribaltare tutte le linee che si vuole, tante volte quante si desidera. Qual è il numero minimo di ribaltamenti di linee che permette di vedere esattamente 2020 gettoni rossi?

**Risposta: 0022.**

**Svolgimento.** Ribaltiamo 20 colonne: 2000 gettoni rossi; ora per ogni riga ribaltata si guadagnano  $10 = 30 - 20$  gettoni rossi per cui basta girare 2 righe per avere  $2000 + 20$  gettoni rossi.

## 9. La vetrata

La figura ti mostra lo schema di una finestra semicircolare chiusa con una vetrata, costituita dalle lastre di vetro che vengono evidenziate. Le basi (lati orizzontali) delle lastre hanno tutte la stessa lunghezza, un decimo del diametro che misura 250 centimetri. Quanti centimetri misura l'altezza di ognuna delle lastre rettangolari?



**Risposta: 0075.**

**Svolgimento.** L'altezza misura quanto l'altro cateto di un triangolo rettangolo un cui cateto misura  $\frac{4}{5}$  dell'ipotenusa (raggio del semicerchio), in questo caso dunque  $(\frac{3}{5}) \times 125$ .

## 10. L'età di Sofia

Sofia ha fatto un calcolo: se moltiplica l'età (in anni) che aveva 55 anni fa per l'età che avrebbe fra 55 anni se fosse ancora viva, ottiene un numero che è il cubo di un numero primo. Quanti anni ha Sofia?

**Risposta: 0066.**

**Svolgimento.** Se  $x$  è l'età di Sofia, deve essere  $(x - 55)(x + 55) = p^3$ , dove  $p$  è un numero primo.

$x = 56$  non è accettabile perché  $56 + 55$  non è un cubo perfetto. Allora deve essere  $x - 55 = p$  e  $x + 55 = p^2$ , che comporta  $p^2 - p = p(p - 1) = 110$ , da cui  $p = 11$ .

## 11. Somma di cubi

Due numeri interi positivi  $a$  e  $b$  sono tali che  $a^3 - b^3 = 485$ . Quanto vale  $a^3 + b^3$ ?

**Risposta: 0539.**

**Svolgimento.** I fattori (primi) di 485 sono 5 e 97.

Si ha  $485 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  con  $0 < a - b < a^2 + ab + b^2$ . Allora o  $a - b = 1$  o  $a - b = 5$ .

La prima ipotesi è da scartare perché comporterebbe  $a^2 + ab + b^2 = 485$ , da cui  $3(b^2 + b) = 484$ , impossibile perché 484 non è divisibile per 3.

La seconda ipotesi fornisce  $a^2 + ab + b^2 = 97$ , da cui  $(b + 8)(b - 3) = 0$ , che comporta  $b = 3$  ( $b$  è positivo).

## 12. Sandro il pasticcione

Sei numeri interi erano scritti in progressione aritmetica (cioè la differenza di ciascuno, a parte il primo, con il precedente era sempre la stessa). Nel ricopiarli, Sandro il pasticcione non solo ne ha dimenticato uno, ma ne ha anche sbagliato un altro. Così ha scritto: 11, 25, 32, 37, 46. Qual è la somma dei due numeri della progressione iniziale che Sandro ha sbagliato o dimenticato?

**Risposta: 0057.**

**Svolgimento.** È facile convincersi che la ragione è 7, poiché, escludendo 37, ogni coppia di numeri ha differenza che è 7 o un suo multiplo (mentre le quattro differenze che hanno 37 come minuendo sono 26, 12, 5, -9, che hanno MCD = 1: quindi 37 deve essere il numero trascritto male).  $39 + 18 = 57$ .

### 13. Bigliettini

Per identificare ogni partecipante ad una gara vengono usati bigliettini rettangolari. Una faccia è grigia, uguale per tutti; l'altra è ripartita in 5 quadrati (congruenti) allineati che possono venire colorati avendo a disposizione 4 colori diversi; questi colori possono venire impiegati in qualunque posizione, anche solo in parte (ad esempio, è possibile che in un bigliettino venga impiegato un solo colore). Non vi sono altri segni distintivi sui bigliettini. Quanti partecipanti possono essere ammessi, al massimo?

**Risposta: 0544.**

**Svolgimento.** Gli allineamenti ordinati costituiti da 5 oggetti scelti fra 4 disponibili sono  $4^5 = 1024$ . Non potendo distinguere i bigliettini in seguito a rotazioni, ogni allineamento fornisce lo stesso bigliettino dell'allineamento ad esso opposto: occorre quindi dimezzare il numero degli allineamenti non palindromi. Gli allineamenti palindromi sono  $4^3 = 64$ . In totale  $(1024 - 64)/2 + 64$  bigliettini.

### 14. Il bottino

Un bottino di guerra di 44.100 monete d'oro viene ripartito in sacchetti: uno di 1, uno di 3, uno di 5, uno di 7 monete ... e così via. Uno dei sacchetti viene poi riposto in una cassaforte, due dei rimanenti insieme in un'altra cassaforte, tre dei rimanenti insieme in una terza cassaforte e così via. Quante sono, in totale, le casseforti impiegate?

**Risposta: 0020.**

**Svolgimento.** La somma dei primi  $n$  interi dispari è  $n^2$ , dunque i sacchetti sono 210, che è la somma dei primi 20 interi positivi.

### 15. Rose e tulipani

Un politico organizza una festa in una enorme piazza dove sono disposte in cerchio 2020 sedie. Il politico sa che tutte le sedie verranno occupate e che i partecipanti si siederanno in modo che ogni donna abbia a fianco almeno un uomo. Decide di regalare ad ogni donna una rosa e ad ogni uomo un tulipano, che ordinerà ad un fiorista una volta che le sedie verranno occupate. Una rosa gli costa 3 euro, un tulipano 2 euro. Qual è la spesa massima in euro che potrebbe dover sostenere?

**Risposta: 5386.**

**Svolgimento.** Occorre prevedere quante possano essere al massimo le donne (le rose costano di più). Se le persone fossero 2019 (numero divisibile per 3), le donne potrebbero essere al massimo il doppio degli uomini, dunque 1346, con disposizione ciclica DDU che è l'unica a consentire questa proporzione; è chiaro che anche con 2020 persone le donne non possono essere di più. D'altra parte è possibile inserire un uomo a fianco di un uomo qualunque senza violare la regola, dunque la disposizione con 1346 donne e 674 uomini è effettivamente realizzabile.