Kangourou della Matematica 2020
finale nazionale italiana
Cervia, 10 ottobre 2020

LIVELLO STUDENT

Tutte le risposte devono essere giustificate

S1. (*5 punti*) Sia n il più piccolo intero positivo tale che il numero $7 \times n$ abbia 2021 cifre. Qual è la cifra delle unità di n?

S2. (*7 punti*) Riempiamo una griglia quadrata 2020×2020 inserendovi i primi 2020^2 numeri interi positivi, uno per casella: se accade che uno dei numeri inseriti è il più grande fra tutti quelli nella sua riga e il più piccolo fra tutti quelli nella sua colonna, diciamo che quel numero è in posizione *speciale* relativamente al modo in cui abbiamo riempito la griglia. Discuti, motivando la risposta, la verità o la falsità per ciascuna delle seguenti tre affermazioni:

a) relativamente ad ogni modo di riempire la griglia esiste almeno un numero speciale;
b) relativamente a qualche modo di riempire la griglia esiste almeno un numero speciale;
c) relativamente ad ogni modo di riempire la griglia esiste al più un numero speciale.

S3. (*11 punti*) Quante sono le coppie ordinate (x,y) di numeri interi (non necessariamente positivi) tali che $x^2 + 7y = xy$?

S4. (*14 punti*) Quale tra i due numeri 129^{29} e 4095^{17} è il maggiore?

S5. (*18 punti*) Una circonferenza di centro I è inscritta in un triangolo ABC : denota con D ed E i suoi punti di tangenza rispettivamente ai lati BC e AC. Denota inoltre con M e N rispettivamente i punti medi di BC e AB e con P l'intersezione tra la retta congiungente A con I e quella congiungente D con E. Dimostra che M, N e P sono allineati.

S6. (*22 punti*) Premessa: una successione di numeri reali $\{c_i\}_{i\in\mathrm{N}}$ si dice convergente a 0 se accade che, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un indice i_0 tale che, per ogni $i > i_0$, si abbia $|c_i| < \varepsilon$. Decidi se la seguente affermazione è vera o falsa, motivando la risposta.

"Sia $\{c_i\}_{i\in\mathrm{N}}$ una successione di numeri reali convergente a 0 tale che si abbia

$$|c_1 + c_2 + \dots + c_n| < 2 \text{ per ogni } n \text{ in } \mathrm{N}.$$

Allora esiste $M > 0$ tale che si abbia

$$|c_1^3 + c_2^3 + \dots + c_n^3| < M \text{ per ogni } n \text{ in } \mathrm{N}."$$

(*Può essere utile sapere che, fissato un numero positivo a, esiste un numero* $M = M(a)$ *tale che si abbia* $1 + 1/2^a + 1/3^a + \dots + 1/n^a < M$ *per ogni n in* N *se e solo se* $a > 1$.)

LIVELLO STUDENT

Tutte le risposte devono essere giustificate

S1. (*5 punti*) Sia n il più piccolo intero positivo tale che il numero $7 \times n$ abbia 2021 cifre. Qual è la cifra delle unità di n?

Risposta: 9.
Soluzione. (alternativa veloce a quella proposta in B5 e C3) Per essere il più piccolo possibile, il numero $m = 7 \times n$ deve avere la forma $m = 10^{2020} + A = (10^6)^{336} \times 10^4 + A \equiv 1^{336} \times 2^2 + A \equiv 0 \bmod 7$ se e solo se $A = 3$ e quindi l'ultima cifra di n è 9 ($7 \times 9 = 63$).

S2. (*7 punti*) Riempiamo una griglia quadrata 2020×2020 inserendovi i primi 2020^2 numeri interi positivi, uno per casella: se accade che uno dei numeri inseriti è il più grande fra tutti quelli nella sua riga e il più piccolo fra tutti quelli nella sua colonna, diciamo che quel numero è in posizione *speciale* relativamente al modo in cui abbiamo riempito la griglia. Discuti, motivando la risposta, la verità o la falsità per ciascuna delle seguenti tre affermazioni:

d) relativamente ad ogni modo di riempire la griglia esiste almeno un numero speciale;
e) relativamente a qualche modo di riempire la griglia esiste almeno un numero speciale;
f) relativamente ad ogni modo di riempire la griglia esiste al più un numero speciale.

Risposta: a) FALSA, b) VERA, c) VERA.
Soluzione. Se si dispongono gli interi da 1 a 2020 sulla diagonale discendente e quelli da 2020^2 a $2020^2 - 2019$ sull'altra, ognuno dei primi è il minimo della sua colonna ed è diverso da ognuno dei secondi che è il massimo della sua riga, dunque non esistono numeri in posizione speciale. Se si dispongono gli interi da 1 a 2020 a crescere da sinistra a destra nella prima riga e quelli da 2020 a 4039 a crescere dall'alto in basso nell'ultima colonna, il numero 2020 risulta in posizione speciale. Non possono esserci due numeri in posizione speciale. Denotiamo infatti con $[a,b]$ il numero nella generica posizione (a,b). Entrambi $[i,j]$ e $[p,q]$ siano in posizione speciale: da $[i,j] > [i,q] > [p,q] > [p,j] > [i,j]$ segue l'assurdo.

S3. (*11 punti*) Quante sono le coppie ordinate (x,y) di numeri interi (non necessariamente positivi) tali che $x^2 + 7y = xy$?

Risposta: 6.
Soluzione. Chiaramente non può essere $x = 7$. Allora deve essere, e basta che sia,

$$y = x^2/(x - 7) = (x^2 - 49 + 49)/(x - 7) = x + 7 + 49/(x - 7)$$

da cui segue che $x - 7$ può valere solo ± 1, ± 7 o ± 49.

S4. (*14 punti*) Quale tra i due numeri 129^{29} e 4095^{17} è il maggiore?

Risposta: il secondo.

Soluzione. Tesi equivalente: essendo $129 = 2^7 + 1$ e $4095 = 2^{12} - 1$:

$$(2^7+1)^{12} < \left(\frac{2^{12}-1}{2^7+1}\right)^{17}$$

Lo sviluppo dei primi termini del binomio a sinistra convince rapidamente che

$$(2^7+1)^{12} < 2^{84} + 2^{83}$$

Invece $\frac{2^{12}-1}{2^7+1} = 2^5 \times \frac{4095}{4096} \times \frac{128}{129} = 2^5\left(1-\frac{1}{129}\right)\left(1-\frac{1}{4096}\right) > 2^5\left(1-\frac{1}{68}\right)$

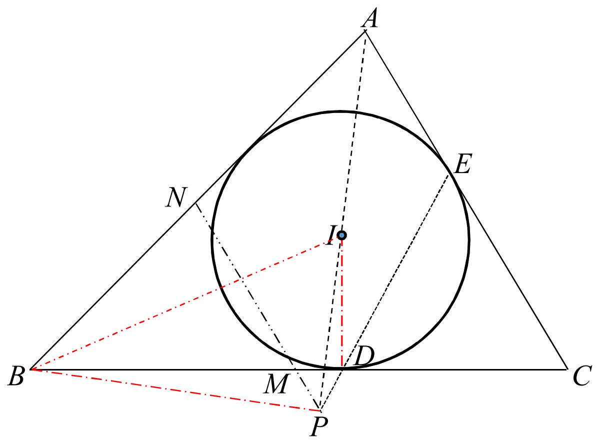
poiché $\frac{1}{68} > \frac{1}{129} + \frac{1}{4096} - \frac{1}{4096\times 129}$

e

$$\left(\frac{2^{12}-1}{2^7+1}\right)^{17} > 2^{85}\left(1-\frac{1}{68}\right)^{17} > 2^{85}\left(1-\frac{17}{68}\right) = 2^{85}\left(1-\frac{1}{4}\right) = 3\times 2^{83} = 2^{84} + 2^{83}$$

S5. (*18 punti*) Una circonferenza di centro I è inscritta in un triangolo ABC: denota con D ed E i suoi punti di tangenza rispettivamente ai lati BC e AC. Denota inoltre con M e N rispettivamente i punti medi di BC e AB e con P l'intersezione tra la retta congiungente A con I e quella congiungente D con E. Dimostra che M, N e P sono allineati.

Soluzione Se ABC è isoscele con vertice in A, AI oltre che bisettrice di $\widehat{BAC}$ è anche mediana di BC e D coincide con M: quindi M e P coincidono e sono banalmente allineati con N.



Supponiamo che AB sia più lungo di AC, come nel primo disegno. Denotiamo con α, β, γ le ampiezze dei tre angoli A, B, C.

Ogni angolo alla base del triangolo isoscele CDE ha ampiezza $90° - \gamma/2$ e quindi questa è anche la misura dell'angolo opposto al vertice $\widehat{BDP}$.

Anche $\widehat{BIP}$, angolo esterno di BIA misura $(\alpha+\beta)/2 = 90° - \gamma/2$.

Quindi il quadrilatero $BIDP$ è inscrittibile. In particolare sono congruenti (e quindi entrambi retti) gli angoli $\widehat{IDB}$ e $\widehat{IPB}$.

Nel triangolo rettangolo BPA, N è il centro della circonferenza circoscritta e quindi l'angolo al centro $\widehat{BNP}$ è il doppio dell'angolo alla circonferenza $\widehat{BAP}$ e quindi è ampio α, come l'angolo in A: ne segue che NP è parallelo ad AC, come MN (che congiunge i punti medi) e quindi i tre punti sono allineati.

Se AC è più lungo di AB la procedura è la stessa.

Da

$\widehat{IDP} = 90° - (90° - \gamma/2) = \gamma/2$

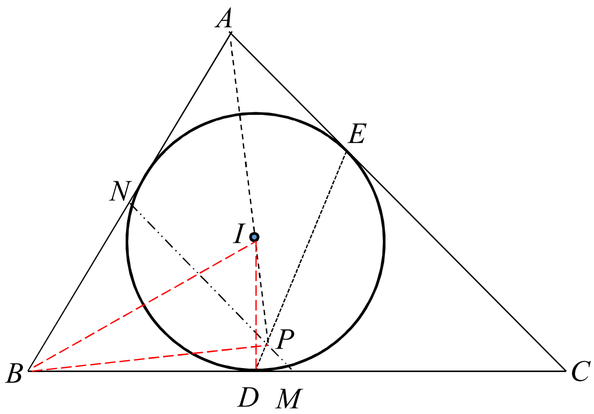
$\widehat{APE} = (90° - \gamma/2) - \alpha/2 = \beta/2$

si ricava

$\widehat{IPD} = 180° - \beta/2$

e dato che $\widehat{IBD} = \beta/2$

il quadrilatero BDPI è inscrittibile ecc.



S6. (*22 punti*) Premessa: una successione di numeri reali $\{c_i\}_{i\in \mathrm{N}}$ si dice convergente a 0 se accade che, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$, esiste un indice i_0 tale che, per ogni $i > i_0$, si abbia $|c_i| < \varepsilon$. Decidi se la seguente affermazione è vera o falsa, motivando la risposta.

"Sia $\{c_i\}_{i\in \mathrm{N}}$ una successione di numeri reali convergente a 0 tale che si abbia

$$|c_1 + c_2 + \ldots + c_n| < 2 \text{ per ogni n in N.}$$

Allora esiste $M > 0$ tale che si abbia

$$|c_1^3 + c_2^3 + \ldots + c_n^3| < M \text{ per ogni } n \text{ in N."}$$

(*Può essere utile sapere che, fissato un numero positivo a, esiste un numero M = M(a) tale che si abbia* $1 + 1/2^a + 1/3^a + \ldots + 1/n^a < M$ *per ogni n in* N *se e solo se a > 1.*)

Risposta: FALSA.

Soluzione. Per semplicità di scrittura indichiamo con r_k la radice cubica di $1/k$. Si consideri la successione

$$1,\ r_2/2,\ r_2/2,\ -r_2, \ldots, \underbrace{\frac{r_k}{k}, \frac{r_k}{k}, \ \ldots, \frac{r_k}{k}}_{k \text{ volte}}, -r_k, \ldots .$$

Chiaramente, qualunque sia n, la somma dei primi n termini è minore di 2. Sommando invece i cubi dei primi n termini, al variare di n si ottengono somme non equilimitate verso il basso. Infatti basta osservare che, per ogni k, si ha $k \times (r_k/k)^3 = 1/k^3$: utilizzando il suggerimento con $a = 3$ e raggruppando termini positivi in quantità qualunque si deduce che le loro somme sono equilimitate; sempre utilizzando il suggerimento con $a = 1$ e sommando i primi k termini negativi si deduce che le loro somme non lo sono.