Kangourou della Matematica 2020
finale nazionale italiana
Cervia, 10 ottobre 2020

# *LIVELLO JUNIOR*

## Tutte le risposte devono essere giustificate

**J1.** (*5 punti*) Nel piano cartesiano, quanto è lungo il tragitto più breve che collega il punto (808, 808) al punto (404, -808) toccando almeno una volta l'asse delle $y$?

**J2.** (*7 punti*) Sia $n$ il più piccolo intero positivo tale che il numero $7 \times n$ abbia 2021 cifre. Qual è la cifra delle unità di $n$?

**J3.** (*11 punti*) Riempiamo una griglia quadrata 2020×2020 inserendovi i primi $2020^2$ numeri interi positivi, uno per casella: se accade che uno dei numeri inseriti è il più grande fra tutti quelli nella sua riga e il più piccolo fra tutti quelli nella sua colonna, diciamo che quel numero è in posizione *speciale* relativamente al modo in cui abbiamo riempito la griglia. Discuti, motivando la risposta, la verità o la falsità per ciascuna delle seguenti tre affermazioni:

a) relativamente ad ogni modo di riempire la griglia esiste almeno un numero speciale;
b) relativamente a qualche modo di riempire la griglia esiste almeno un numero speciale;
c) relativamente ad ogni modo di riempire la griglia esiste al più un numero speciale.

**J4.** (*14 punti*) Su una circonferenza sono marcati 2020 punti a due a due distinti fra loro. Si considerino tutti i possibili poligoni convessi (cioè poligoni non intrecciati che abbiano tutti gli angoli interni di misura inferiore a 180 gradi) i cui vertici siano alcuni dei punti marcati. Sia $p$ uno qualsiasi dei punti marcati. Sono di più i poligoni che contengono $p$ o quelli che non lo contengono, o sono in ugual numero?

**J5.** (*18 punti*) Quante sono le coppie ordinate $(x,y)$ di numeri interi (non necessariamente positivi) tali che $x^2 + 7y = xy$?

**J6.** (*22 punti*) Una circonferenza di centro $I$ è inscritta in un triangolo $ABC$: denota con $D$ ed $E$ i suoi punti di tangenza rispettivamente ai lati $BC$ e $AC$. Denota inoltre con $M$ e $N$ rispettivamente i punti medi di $BC$ e $AB$ e con $P$ l'intersezione tra la retta congiungente $A$ con $I$ e quella congiungente $D$ con $E$. Dimostra che $M$, $N$ e $P$ sono allineati.

# Kangourou della Matematica 2020
# finale nazionale italiana
# Cervia, 10 ottobre 2020

## *LIVELLO JUNIOR*

<u>Tutte le risposte devono essere giustificate</u>

**J1.** (*5 punti*) Nel piano cartesiano, quanto è lungo il tragitto più breve che collega il punto (808, 808) al punto (404, -808) toccando almeno una volta l'asse delle *y*?

**Risposta: 2020.**
**Soluzione.** Si ponga 404 = $a$. Il tragitto più breve si ottiene ovviamente "riflettendo sull'asse *y*", dunque non modificandone la lunghezza, il segmento che collega ($2a$,$2a$) a ($-a$,$-2a$). Per Pitagora, la sua lunghezza è la radice quadrata di $4^2a^2 + 3^2a^2 = 5^2a^2 = 2020^2$.

**J2.** (*7 punti*) Sia $n$ il più piccolo intero positivo tale che il numero $7 \times n$ abbia 2021 cifre. Qual è la cifra delle unità di $n$?

**Risposta: 9.**
**Soluzione.** (alternativa veloce a quella proposta in B6 e C3) Per essere il più piccolo possibile, il numero $m = 7 \times n$ deve avere la forma $m = 10^{2020} + A = (10^6)^{336} \times 10^4 + A \equiv 1^{336} \times 2^2 + A \equiv 0 \mod 7$ se e solo se $A = 3$ e quindi l'ultima cifra di $n$ è 9 ($7 \times 9 = 63$).

**J3.** (*11 punti*) Riempiamo una griglia quadrata 2020×2020 inserendovi i primi $2020^2$ numeri interi positivi, uno per casella: se accade che uno dei numeri inseriti è il più grande fra tutti quelli nella sua riga e il più piccolo fra tutti quelli nella sua colonna, diciamo che quel numero è in posizione *speciale* relativamente al modo in cui abbiamo riempito la griglia. Discuti, motivando la risposta, la verità o la falsità per ciascuna delle seguenti tre affermazioni:

d) relativamente ad ogni modo di riempire la griglia esiste almeno un numero speciale;
e) relativamente a qualche modo di riempire la griglia esiste almeno un numero speciale;
f) relativamente ad ogni modo di riempire la griglia esiste al più un numero speciale.

**Risposta: a) FALSA, b) VERA, c) VERA.**
**Soluzione**. Se si dispongono gli interi da 1 a 2020 sulla diagonale discendente e quelli da $2020^2$ a $2020^2 - 2019$ sull'altra, ognuno dei primi è il minimo della sua colonna ed è diverso da ognuno dei secondi che è il massimo della sua riga, dunque non esistono numeri in posizione speciale. Se si dispongono gli interi da 1 a 2020 a crescere da sinistra a destra nella prima riga e quelli da 2020 a 4039 a crescere dall'alto in basso nell'ultima colonna, il numero 2020 risulta in posizione speciale. Non possono esserci due numeri in posizione speciale. Denotiamo infatti con $[a,b]$ il numero nella generica posizione $(a,b)$. Entrambi $[i,j]$ e $[p,q]$ siano in posizione speciale: da $[i,j] > [i,q] > [p,q] > [p,j] > [i,j]$ segue l'assurdo.

**J4.** (*14 punti*) Su una circonferenza sono marcati 2020 punti a due a due distinti fra loro. Si considerino tutti i possibili poligoni convessi (cioè poligoni non intrecciati che abbiano tutti gli angoli interni di misura inferiore a 180 gradi) i cui vertici siano alcuni dei punti marcati. Sia $p$ uno qualsiasi dei punti marcati. Sono di più i poligoni che contengono $p$ o quelli che non lo contengono, o sono in ugual numero?

**Risposta: sono di più i poligoni che contengono *p*.**

**Soluzione.** Ogni poligono (convesso) *P* che non contenga *p* può essere "ampliato" ad un poligono (convesso) che contenga *p* nel modo seguente: gli si unisca il triangolo che ha come vertici *p* stesso e i due vertici di *P* che sono i "più vicini" a *p* e da parti opposte rispetto a *p*. Poligoni diversi che non contengano *p* hanno ampliamenti diversi; d'altra parte, ogni triangolo uno dei cui vertici sia *p* non è ampliamento di alcun poligono che non contenga *p*.

**J5.** (*18 punti*) Quante sono le coppie ordinate $(x,y)$ di numeri interi (non necessariamente positivi) tali che $x^2 + 7y = xy$?

**Risposta: 6.**

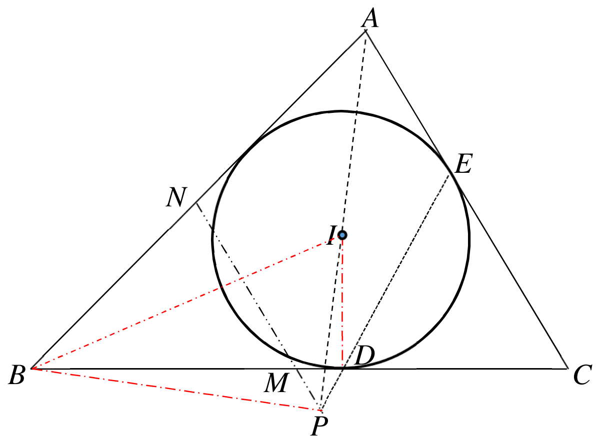
**Soluzione.** Chiaramente non può essere $x = 7$. Allora deve essere, e basta che sia,

$$y = x^2/(x - 7) = (x^2 - 49 + 49)/(x - 7) = x + 7 + 49/(x - 7)$$

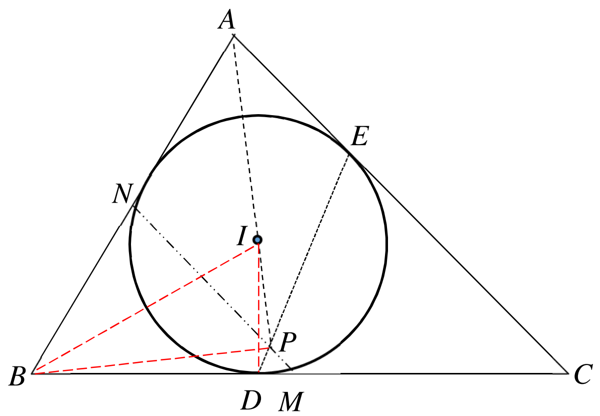
da cui segue che $x - 7$ può valere solo $\pm 1$, $\pm 7$ o $\pm 49$.

**J6.** (*22 punti*) Una circonferenza di centro $I$ è inscritta in un triangolo $ABC$: denota con $D$ ed $E$ i suoi punti di tangenza rispettivamente ai lati $BC$ e $AC$. Denota inoltre con $M$ e $N$ rispettivamente i punti medi di $BC$ e $AB$ e con $P$ l'intersezione tra la retta congiungente $A$ con $I$ e quella congiungente $D$ con $E$. Dimostra che $M$, $N$ e $P$ sono allineati.

**Soluzione.** Se $ABC$ è isoscele con vertice in $A$, $AI$ oltre che bisettrice di $\widehat{BAC}$ è anche mediana di $BC$ e $D$ coincide con $M$: quindi $M$ e $P$ coincidono e sono banalmente allineati con $N$.




Supponiamo che $AB$ sia più lungo di $AC$, come nel primo disegno. Denotiamo con $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ le ampiezze dei tre angoli A, B, C.
Ogni angolo alla base del triangolo isoscele CDE ha ampiezza $90° - \gamma/2$ e quindi questa è anche la misura dell'angolo opposto al vertice $\widehat{BDP}$.
Anche $\widehat{BIP}$, angolo esterno di $BIA$ misura $(\alpha+\beta)/2 = 90° - \gamma/2$.
Quindi il quadrilatero $BIDP$ è inscrittibile. In particolare sono congruenti (e quindi entrambi retti) gli angoli $\widehat{IDB}$ e $\widehat{IPB}$.
Nel triangolo rettangolo BPA, $N$ è il centro della circonferenza circoscritta e quindi l'angolo al centro $\widehat{BNP}$ è il doppio dell'angolo alla circonferenza $\widehat{BAP}$ e quindi è ampio $\alpha$, come l'angolo in $A$: ne segue che NP è parallelo ad AC, come $MN$ (che congiunge i punti medi) e quindi i tre punti sono allineati.




Se $AC$ è più lungo di $AB$ la procedura è la stessa.
Da
$\widehat{IDP}=90° - (90° - \gamma/2) = \gamma/2$
$\widehat{APE}=(90° - \gamma/2)- \alpha/2=\beta/2$
si ricava
$\widehat{IPD}=180° -\beta/2$
e dato che $\widehat{IBD}=\beta/2$
il quadrilatero BDPI è inscrittibile ecc.