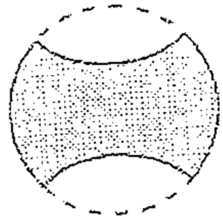
Kangourou della Matematica 2020
finale nazionale italiana
Cervia, 10 ottobre 2020

LIVELLO CADET

Tutte le risposte devono essere giustificate

C1. (*5 punti*) I quattro archi che delimitano la regione ombreggiata hanno tutti la stessa lunghezza, uguale alla lunghezza dei due archi tratteggiati. Questa lunghezza è un quarto della lunghezza di una circonferenza di raggio 1 cm. Quanti centimetri quadrati misura l'area della regione ombreggiata?



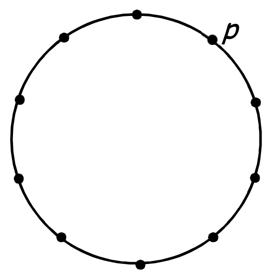
C2. (*7 punti*) Nel piano cartesiano, quanto è lungo il tragitto più breve che collega il punto (808, 808) al punto (404, -808) toccando almeno una volta l'asse delle y?

C3. (*11 punti*) Sia n il più piccolo intero positivo tale che il numero $7 \times n$ abbia 2021 cifre. Qual è la cifra delle unità di n?

C4. (*14 punti*) Riempiamo una griglia quadrata 6×6 inserendovi i primi 6^2 numeri interi positivi, uno per casella: se accade che uno dei numeri inseriti è il più grande fra tutti quelli nella sua riga e il più piccolo fra tutti quelli nella sua colonna, diciamo che quel numero è in posizione *speciale* relativamente al modo in cui abbiamo riempito la griglia. Discuti, motivando la risposta, la verità o la falsità per ciascuna delle seguenti tre affermazioni:

a) relativamente ad ogni modo di riempire la griglia esiste almeno un numero speciale;
b) relativamente a qualche modo di riempire la griglia esiste almeno un numero speciale;
c) relativamente ad ogni modo di riempire la griglia esiste al più un numero speciale.

C5. (*18 punti*) Su una circonferenza sono marcati 10 punti a due a due distinti fra loro. Si considerino tutti i possibili poligoni convessi (cioè poligoni non intrecciati che abbiano tutti gli angoli interni di misura inferiore a 180 gradi) i cui vertici siano alcuni dei punti marcati. Sia p uno qualsiasi dei punti marcati. Sono di più i poligoni che contengono p o quelli che non lo contengono, o sono in ugual numero?



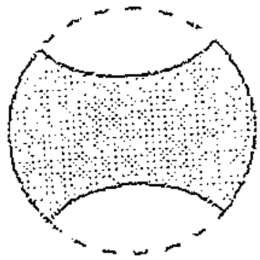
C6. (*22 punti*) Quante sono le coppie ordinate (x,y) di numeri interi (non necessariamente positivi) tali che $x^2 + 7y = xy$?

Kangourou della Matematica 2020
finale nazionale italiana
Cervia, 10 ottobre 2020

LIVELLO CADET

Tutte le risposte devono essere giustificate

C1. (*5 punti*) I quattro archi che delimitano la regione ombreggiata hanno tutti la stessa lunghezza, uguale alla lunghezza dei due archi tratteggiati. Questa lunghezza è un quarto della lunghezza di una circonferenza di raggio 1 cm. Quanti centimetri quadrati misura l'area della regione ombreggiata?



Risposta: 2.
Soluzione. I "vertici" della regione sono i vertici di un quadrato di diagonale 2 e di area evidentemente uguale a quella della regione.

C2. (*7 punti*) Nel piano cartesiano, quanto è lungo il tragitto più breve che collega il punto (808, 808) al punto (404, -808) toccando almeno una volta l'asse delle *y*?

Risposta: 2020.
Soluzione. Si ponga 404 = *a*. Il tragitto più breve si ottiene ovviamente "riflettendo sull'asse *y*", dunque non modificandone la lunghezza, il segmento che collega (2*a*,2*a*) a (-*a*,-2*a*). Per Pitagora, la sua lunghezza è la radice quadrata di $4^2a^2 + 3^2a^2 = 5^2a^2 = 2020^2$.

C3. (*11 punti*) Sia *n* il più piccolo intero positivo tale che il numero 7 × *n* abbia 2021 cifre. Qual è la cifra delle unità di *n*?

Risposta: 9.
Soluzione. Per essere il più piccolo possibile, il numero *m* = 7 × *n* deve avere la forma *m* = 10…0*A* dove le cifre a destra di 1, in numero di 2020, sono tutte 0 salvo al più *A*. Nel quoziente *m*/7 il blocco di sei cifre 142857, corrispondente ai resti 3, 2, 6, 4, 5, 1, compare inizialmente 336 (= 2016/6) volte, lasciando come ultima parte della divisione 1000*A*/7: è dunque seguito, se per *A* si sceglie 3 in modo da ottenere resto 0, da 1429.

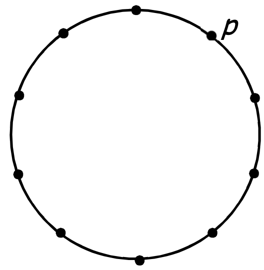
C4. (*14 punti*) Riempiamo una griglia quadrata 6×6 inserendovi i primi 6^2 numeri interi positivi, uno per casella: se accade che uno dei numeri inseriti è il più grande fra tutti quelli nella sua riga e il più piccolo fra tutti quelli nella sua colonna, diciamo che quel numero è in posizione *speciale* relativamente al modo in cui abbiamo riempito la griglia. Discuti, motivando la risposta, la verità o la falsità per ciascuna delle seguenti tre affermazioni:

d) relativamente ad ogni modo di riempire la griglia esiste almeno un numero speciale;
e) relativamente a qualche modo di riempire la griglia esiste almeno un numero speciale;
f) relativamente ad ogni modo di riempire la griglia esiste al più un numero speciale.

Risposta: a) FALSA, b) VERA, c) VERA.

Soluzione. Se si dispongono gli interi da 1 a 6 sulla diagonale discendente e quelli da 6^2 a $6^2 - 5$ sull'altra, ognuno dei primi è il minimo della sua colonna ed è diverso da ognuno dei secondi che è il massimo della sua riga, dunque non esistono numeri in posizione speciale.
Se si dispongono gli interi da 1 a 6 a crescere da sinistra a destra nella prima riga e quelli da 6 a 11 a crescere dall'alto in basso nell'ultima colonna, il numero 6 risulta in posizione speciale.
Non possono esserci due numeri in posizione speciale. Denotiamo infatti con $[a,b]$ il numero nella generica posizione (a,b). Entrambi $[i,j]$ e $[p,q]$ siano in posizione speciale: da $[i,j] > [i,q] > [p,q] > [p,j] > [i,j]$ segue l'assurdo.

C5. (*18 punti*) Su una circonferenza sono marcati 10 punti a due a due distinti fra loro. Si considerino tutti i possibili poligoni convessi (cioè poligoni non intrecciati che abbiano tutti gli angoli interni di misura inferiore a 180 gradi) i cui vertici siano alcuni dei punti marcati. Sia p uno qualsiasi dei punti marcati. Sono di più i poligoni che contengono p o quelli che non lo contengono, o sono in ugual numero?



Risposta: sono di più i poligoni che contengono *p*.
Soluzione. Ogni poligono (convesso) P che non contenga p può essere "ampliato" ad un poligono (convesso) che contenga p nel modo seguente: gli si unisca il triangolo che ha come vertici p stesso e i due vertici di P che sono i "più vicini" a p e da parti opposte rispetto a p. Poligoni diversi che non contengano p hanno ampliamenti diversi; d'altra parte, ogni triangolo uno dei cui vertici sia p non è ampliamento di alcun poligono che non contenga p.

C6. (*22 punti*) Quante sono le coppie ordinate (x,y) di numeri interi (non necessariamente positivi) tali che $x^2 + 7y = xy$?

Risposta: 6.
Soluzione. Chiaramente non può essere $x = 7$. Allora deve essere, e basta che sia,

$$y = x^2/(x - 7) = (x^2 - 49 + 49)/(x - 7) = x + 7 + 49/(x - 7)$$

da cui segue che $x - 7$ può valere solo ± 1, ± 7 o ± 49.