



Quesiti

1. L'espressione

Qual è il risultato della seguente espressione

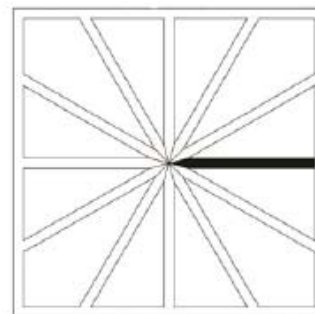
$$6/3 \times 9/6 \times 12/9 \times \dots \times (3n+3)/(3n) \times \dots \times 2019/2016 ?$$

2. I listelli

La figura a destra mostra un'intelaiatura costituita da listelli di legno, tutti dello stesso spessore; 12 di questi sono smussati a un'estremità (in modo simmetrico come suggerisce l'altra figura) così da poterli incollare nel centro di simmetria dell'intelaiatura, distribuendoli in modo che la misura



dell'angolo tra ogni listello e quello che lo segue (in verso orario) sia costante. Quanti gradi misura l'angolo denotato in figura con α ?



3. Il lucchetto

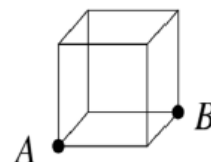
Il codice per aprire un lucchetto è formato da 4 cifre tutte diverse fra loro. Rispetto a quel codice, ognuno dei seguenti quattro numeri

6427 4271 6412 2671

ha due cifre nella posizione corretta, una cifra in posizione non corretta e una cifra che non è presente. Qual è il codice?

4. Da A a B

Osservate il cubo in figura. Volete andare da A a B muovendovi lungo gli spigoli del cubo senza mai ripassare per uno stesso vertice. In quanti modi diversi potete farlo?



5. Un numero enorme

Quanti fattori 5^5 occorre moltiplicare tra loro per ottenere come risultato 5 elevato a 5^5 ?

6. Il canguro

Un giorno un canguro fa un salto verso nord fuori dalla sua casa e ritorna a casa con un salto verso sud; il giorno dopo fa due salti verso nord e ritorna a casa con due salti verso sud; il giorno dopo ancora fa tre salti verso nord e ritorna a casa con tre salti verso sud, e così via per un po' di giorni. In questo momento, contando tutti i salti fatti a partire dal primo giorno, ne ha fatti 2019. A quanti salti si trova da casa?

7. Ada e Bice

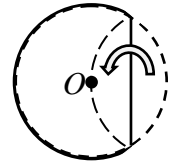
Ada e Bice hanno due sacchetti di identico contenuto: una biglia per ciascuno dei cinque colori A, B, C, D ed E. Ada prende a caso una biglia dal suo sacchetto e la infila in quello di Bice, subito dopo Bice sceglie una biglia a caso dal suo sacchetto e la infila in quello di Ada. Ora i due sacchetti hanno di nuovo 5 biglie ciascuno. Qual è la probabilità che il contenuto dei sacchetti sia equivalente a quello iniziale? (Scrivete la probabilità come frazione di numeri interi p/q ridotta ai minimi termini e scrivete nell'ordine p e q ; ad esempio, se la risposta fosse $7/9$, scrivete [0709].)

8. Fattori primi

Uno dei fattori primi di 12345 è un numero maggiore di 500. Qual è la somma di tutti i suoi fattori primi?

9. Il cerchio piegato

Un segmento circolare di un cerchio di raggio 9 è ripiegato all'interno del cerchio in modo che l'arco passi per il centro O della circonferenza come mostra la figura. Quale numero intero è il più vicino alla lunghezza del contorno della figura risultante che è evidenziato a tratto continuo?



10. Quarte potenze

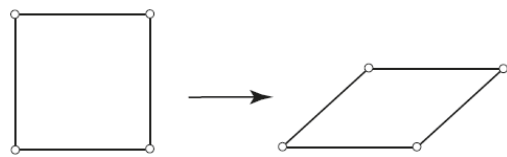
Quante tra le prime mille potenze quarte perfette di numeri interi positivi hanno 1 o 6 come cifra delle unità?

11. In parlamento

In un parlamento siedono 300 deputati; i quattro partiti rappresentati hanno nell'ordine un numero di deputati che è esattamente il 10%, 20%, 25% e 45% del totale. In nessuno dei partiti la differenza fra i due numeri degli eletti dei due sessi supera 1. Qual è il minimo numero di donne (o uomini) che possono essere presenti in quel parlamento?

12. Il reticolo

Un reticolo è un assemblaggio di barre articolate nei loro punti di congiunzione. Quando le sue maglie sono quadrate o rettangolari la struttura, in generale, non è rigida (vedi figura) senza l'aggiunta di barre diagonali.



Quante barre diagonali, al minimo, si devono aggiungere a un reticolo 4×4 a maglie quadrate che non ne contiene alcuna affinché risulti rigido?

13. Media

Il prodotto di tre interi positivi consecutivi è divisibile per

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

Qual è la più piccola media possibile per i tre numeri?

14. Quadrati perfetti

Per quanti interi positivi n accade che sia $n - 2019$ sia $n + 6000$ sono quadrati perfetti?

15. Alice

Alice compone dei braccialetti di perline bianche e nere, che iniziano e finiscono con dei fermagli, seguendo questa regola: pensa un numero, lo divide per due e se non ottiene resto infila una perline nera, se ottiene resto infila una perline bianca; poi ripete l'operazione sul quoziente che ha ottenuto con la divisione precedente e va avanti così finché non ottiene come quoziente 1: a questo punto infila una perline bianca (e aggiunge il fermaglio di chiusura). Ad esempio, qui sotto vedete a sinistra il risultato se pensa 5, a destra il risultato se pensa 6:



(la forma non circolare a sinistra rappresenta il fermaglio che ha messo prima di iniziare il lavoro, quella a destra rappresenta il fermaglio che ha messo alla fine).

Alice ha un generatore di numeri casuali cui può chiedere di fornire numeri con un predeterminato numero di cifre (significative). Se vuole essere certa di arrivare a comporre un braccialetto con almeno 20 perline, qual è il minimo numero di cifre che deve richiedere?



Quesiti e soluzioni

1. L'espressione

Qual è il risultato della seguente espressione

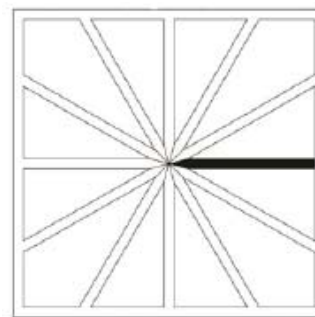
$$6/3 \times 9/6 \times 12/9 \times \dots \times (3n+3)/(3n) \times \dots \times 2019/2016 ?$$

Risposta: 0673.

Soluzione. Semplificando ogni frazione con la successiva, rimangono solo 2019 al numeratore e 3 al denominatore.

2. I listelli

La figura a destra mostra un'intelaiatura costituita da listelli di legno, tutti dello stesso spessore; 12 di questi sono smussati a un'estremità (in modo simmetrico come suggerisce l'altra figura) così da poterli incollare nel centro di simmetria dell'intelaiatura, distribuendoli in modo che la misura dell'angolo tra ogni listello e quello che lo segue (in verso orario) sia costante. Quanti gradi misura l'angolo denotato in figura con α ?



Risposta: 0015.

Soluzione. L'angolo corrispondente alla punta di ogni listello ha misura doppia di quella dell'angolo α ; i listelli non si sovrappongono e tre di tali angoli saturano un angolo retto.

3. Il lucchetto

Il codice per aprire un lucchetto è formato da 4 cifre tutte diverse fra loro. Rispetto a quel codice, ognuno dei seguenti quattro numeri

6427 4271 6412 2671

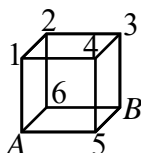
ha due cifre nella posizione corretta, una cifra in posizione non corretta e una cifra che non è presente. Qual è il codice?

Risposta: 6471.

Soluzione. Se 6 non fosse la prima cifra del codice, nel primo numero due delle tre cifre 427 dovrebbero essere al posto corretto: ciò è escluso dagli altri tre numeri. Allora, per via dell'ultimo numero, le ultime due cifre del codice sono 71 e la seconda cifra è 4.

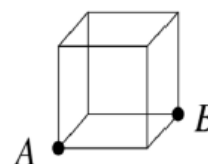
4. Da A a B

Osservate il cubo in figura. Volete andare da A a B muovendovi lungo gli spigoli del cubo senza mai ripassare per uno stesso vertice. In quanti modi diversi potete farlo?



Risposta: 0016.

Soluzione. Numeriamo i vertici del cubo come in figura. Da A si può andare a 5 oppure a 6 (e i cammini che si possono fare sono



simmetrici, quindi si può fare il conto per uno solo dei due) oppure a 1 e di qui a 2 e a 4 (e ancora una volta i cammini che si possono fare sono simmetrici e quindi si possono fare i conti per uno solo dei due). Eventualmente usando un albero, ci si convince facilmente che i soli percorsi possibili sono, a seconda che da A si raggiunga 5 oppure 1:

A5B	A543B	A54326B	A54123B	A54126B	A123B	A12345B	A126B
-----	-------	---------	---------	---------	-------	---------	-------

cioè sono 8; tenuto conto dei percorsi simmetrici corrispondenti a 6 e 4, in tutto sono 16.

5. Un numero enorme

Quanti fattori 5^5 occorre moltiplicare tra loro per ottenere come risultato 5 elevato a 5^5 ?

Risposta: 0625.

Soluzione. Se N è il numero di volte, deve essere $5N = 5^5$.

6. Il canguro

Un giorno un canguro fa un salto verso nord fuori dalla sua casa e ritorna a casa con un salto verso sud; il giorno dopo fa due salti verso nord e ritorna a casa con due salti verso sud; il giorno dopo ancora fa tre salti verso nord e ritorna a casa con tre salti verso sud, e così via per un po' di giorni. In questo momento, contando tutti i salti fatti a partire dal primo giorno, ne ha fatti 2019. A quanti salti si trova da casa?

Risposta: 0039.

Soluzione. La somma dei primi n interi è $n(n+1)/2$. Il più grande intero n tale che $2 \times n(n+1)/2 = n(n+1) < 2019$ è 44 poiché $44 \times 45 = 1980$.

7. Ada e Bice

Ada e Bice hanno due sacchetti di identico contenuto: una biglia per ciascuno dei cinque colori A , B , C , D ed E . Ada prende a caso una biglia dal suo sacchetto e la infila in quello di Bice, subito dopo Bice sceglie una biglia a caso dal suo sacchetto e la infila in quello di Ada. Ora i due sacchetti hanno di nuovo 5 biglie ciascuno. Qual è la probabilità che il contenuto dei sacchetti sia equivalente a quello iniziale? (*Scrivete la probabilità come frazione di numeri interi p/q ridotta ai minimi termini e scrivete nell'ordine p e q ; ad esempio, se la risposta fosse $7/9$, scrivete [0709].*)

Risposta: 0103.

Soluzione. La probabilità che Bice estragga una delle due biglie dello stesso colore è $2/6$.

8. Fattori primi

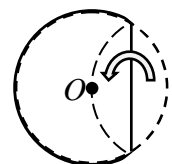
Uno dei fattori primi di 12345 è un numero maggiore di 500. Qual è la somma di tutti i suoi fattori primi?

Risposta: 0831.

Soluzione. 12345 è divisibile per 5 e per 3 e il quoziente della sua divisione per 15 è 823 che quindi è l'altro fattore primo.

9. Il cerchio piegato

Un segmento circolare di un cerchio di raggio 9 è ripiegato all'interno del cerchio in modo che l'arco passi per il centro O della circonferenza come mostra la figura. Quale numero intero è il più vicino alla lunghezza del contorno della figura risultante che è evidenziato a tratto continuo?



Risposta: 0053.

Soluzione. Facilmente si vede che l'arco che delimita il settore circolare ripiegato è sotteso da un angolo di 120 gradi, dunque è lungo un terzo dell'intera circonferenza, e che il tratto rettilineo del contorno è lungo il doppio dell'altezza di un triangolo equilatero di lato lungo quanto il raggio. La lunghezza del contorno è dunque $12\pi + 9\sqrt{3}$. Approssimando per difetto π e $\sqrt{3}$ (rispettivamente con 3,14 e 1,73) si ottiene $37,68 + 15,57 = 53,25$; per eccesso (rispettivamente con 3,15 e 1,74) si ottiene $37,8 + 15,66 = 53,46$, dunque la risposta è 53.

10. Quarte potenze

Quante tra le prime mille potenze quarte perfette di numeri interi positivi hanno 1 o 6 come cifra delle unità?

Risposta: 0800.

Soluzione. Si vede facilmente che tutti e soli i numeri la cui scrittura non termina per 0 o per 5 hanno quarta potenza che termina per 1 o per 6; allora i numeri che ci interessano sono i $4/5$ di 1000, cioè 800.

11. In parlamento

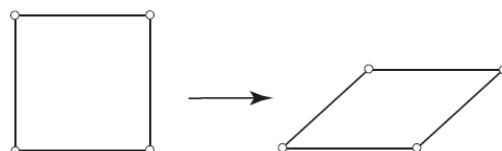
In un parlamento siedono 300 deputati; i quattro partiti rappresentati hanno nell'ordine un numero di deputati che è esattamente il 10%, 20%, 25% e 45% del totale. In nessuno dei partiti la differenza fra i due numeri degli eletti dei due sessi supera 1. Qual è il minimo numero di donne (o uomini) che possono essere presenti in quel parlamento?

Risposta: 0149.

Soluzione. I partiti hanno 30, 60, 75 e 135 deputati e tutti e soli quelli che hanno un numero dispari di deputati possono avere una donna o un uomo in più.

12. Il reticolo

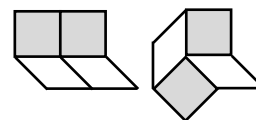
Un reticolo è un assemblaggio di barre articolate nei loro punti di congiunzione. Quando le sue maglie sono quadrate o rettangolari la struttura, in generale, non è rigida (vedi figura) senza l'aggiunta di barre diagonali. Quante barre diagonali, al minimo, si devono aggiungere a un reticolo 4×4 a maglie quadrate che non ne contiene alcuna affinché risulti rigido?



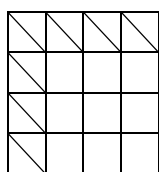
Risposta: 0007.

Soluzione. Basta una diagonale per irrigidire un quadrato, ma questo non basta per irrigidire le maglie successive sulla stessa linea.

Incominciamo a esaminare il caso di un reticolo 2×2 : non solo non basta una barra, ma non ne bastano neppure 2, come mostrano le due figure a fianco, ove i quadrati irrigiditi sono quelli ombreggiati.

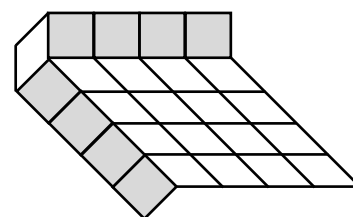


Ovviamente se si irrigidisce anche un terzo quadrato, il quarto non può che essere un rombo con un angolo retto, cioè un quadrato.



Visto che ogni quarta maglia si irrigidisce se le 3 che la circondano a forma di L sono irrigidite, per avere un reticolo 4×4 irrigidito basta inserire le diagonali di 7 quadrati disposti a L sul bordo del quadrato (vedi figura a sinistra). Meno di 7 barre non riescono a irrigidire il reticolo 4×4 : ciò è evidente se si toglie una barra in una maglia non nel

vertice, ma anche togliendo la barra nel vertice può riproporsi una situazione simile alla seconda del reticolo 2×2 (figura a destra).



13. Media

Il prodotto di tre interi positivi consecutivi è divisibile per

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

Qual è la più piccola media possibile per i tre numeri?

Risposta: 0009.

Soluzione. Il prodotto non può essere inferiore a 720; d'altra parte $720 = 8 \times 9 \times 10$.

14. Quadrati perfetti

Per quanti interi positivi n accade che sia $n - 2019$ sia $n + 6000$ sono quadrati perfetti?

Risposta: 0007.

Soluzione. Si deve avere $n = 2019 + h^2$ e $n = k^2 - 6000$, ove h e k sono interi che si possono supporre positivi, e quindi con $k > h$. Risulta $(k - h)(k + h) = 8019 = 3^6 \times 11$. Le possibili diverse coppie non ordinate di numeri il cui prodotto dà $3^6 \times 11$ sono 7, ognuna delle quali fornisce una sola coppia (h, k) con $k > h > 0$ e quindi un solo valore di n .

15. Alice

Alice compone dei braccialetti di perline bianche e nere, che iniziano e finiscono con dei fermagli, seguendo questa regola: pensa un numero, lo divide per due e se non ottiene resto infila una perline nera, se ottiene resto infila una perline bianca; poi ripete l'operazione sul quoziente che ha ottenuto con la divisione precedente e va avanti così finché non ottiene come quoziente 1: a questo punto infila una perline bianca (e aggiunge il fermaglio di chiusura). Ad esempio, qui sotto vedete a sinistra il risultato se pensa 5, a destra il risultato se pensa 6:



(la forma non circolare a sinistra rappresenta il fermaglio che ha messo prima di iniziare il lavoro, quella a destra rappresenta il fermaglio che ha messo alla fine).

Alice ha un generatore di numeri casuali cui può chiedere di fornire numeri con un predeterminato numero di cifre (significative). Se vuole essere certa di arrivare a comporre un braccialetto con almeno 20 perline, qual è il minimo numero di cifre che deve richiedere?

Risposta: 0007.

Soluzione. $2^{19} = 524.288$ è il più piccolo numero che soddisfa certamente la richiesta; dato che tra i numeri di 6 cifre ce ne sono di inferiori a questo, Alice ha la certezza di riuscire a comporre un braccialetto con 20 perline solo se le cifre sono 7.

Ad es. per $1.000.000 = 2^6 + 2^9 + 2^{14} + 2^{16} + 2^{17} + 2^{18} + 2^{19}$ i resti successivi sono:
00000 01001 00001 01111 cioè le perline sono 20.