Kangourou della Matematica 2019
finale nazionale italiana
Cervia, 28 settembre 2019

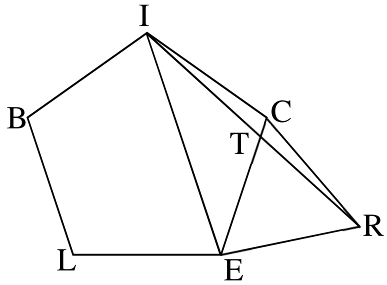
LIVELLO CADET

Tutte le risposte devono essere giustificate

C1. (*5 punti*) Considera i due numeri

$$A = 201920192019 \times 20202020 \quad \text{e} \quad B = 202020202020 \times 20192019.$$

La differenza $A - B$ è positiva, nulla o negativa?



C2. (*7 punti*) Osserva la figura. *IBLEC* è un pentagono regolare e il triangolo *CER* è equilatero. *T* è il punto di intersezione tra i segmenti *CE* e *IR*. Quanti gradi misura l'angolo *ITE*?

C3. (*11 punti*) Gianni ed Elvira giocano in questo modo. Ci sono 66 gettoni sul tavolo: ad ogni turno ognuno di essi può prendere 1 o 2 o 3 o 4 o 5 gettoni. Chi è costretto a prendere l'ultimo gettone perde. Elvira, che vuole vincere, vuole a tutti i costi essere lei ad iniziare. Perché?

C4. (*14 punti*) Il 15 agosto scorso, giorno di Ferragosto, c'è stata la luna piena. Ammettendo che il ciclo lunare sia di 28 giorni esatti, fra quanti anni per la prima volta ci sarà nuovamente la luna piena a Ferragosto? (Se, ad esempio, accadesse l'anno prossimo, dovresti rispondere: fra 1 anno.)

C5. (*18 punti*) In ogni vertice di un quadrato è stato scritto un intero positivo. Se due vertici sono adiacenti, uno dei due interi corrispondenti divide l'altro; se due vertici sono opposti, nessuno dei due interi corrispondenti divide l'altro. Qual è il più piccolo valore possibile per la somma di questi quattro interi?

C6. (*22 punti*) Di una piramide a base rettangolare sono note le lunghezze di tre dei quattro spigoli obliqui che ne congiungono il vertice *V* con i vertici *A*, *B*, *C*, *D* della base: $\overline{VA}$ = 90 m; $\overline{VB}$= 70 m; $\overline{VC}$ = 20 m. È possibile determinare la lunghezza dello spigolo *VD*? In caso affermativo determina tale lunghezza, in caso negativo individua le misure di due piramidi che rispettino i dati del problema in cui la lunghezza dello spigolo *VD* sia diverso.

Kangourou della Matematica 2019
finale nazionale italiana
Cervia, 28 settembre 2019

LIVELLO CADET

Tutte le risposte devono essere giustificate

C1. (*5 punti*) Considera i due numeri

$$A = 201920192019 \times 20202020 \quad \text{e} \quad B = 202020202020 \times 20192019.$$

La differenza $A - B$ è positiva, nulla o negativa?

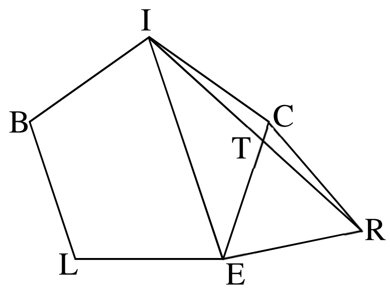
Risposta: nulla.
Soluzione. Si ha

$$A = 2019 \times (10^8 + 10^4 + 1) \times 2020 \times (10^4 + 1)$$

e

$$B = 2020 \times (10^8 + 10^4 + 1) \times 2019 \times (10^4 + 1).$$

C2. (*7 punti*) Osserva la figura. *IBLEC* è un pentagono regolare e il triangolo *CER* è equilatero. *T* è il punto di intersezione tra i segmenti *CE* e *IR*. Quanti gradi misura l'angolo *ITE*?



Risposta: 114.
Soluzione. Gli angoli interni del pentagono misurano 108°. Allora ciascuno dei due angoli congruenti del triangolo isoscele *ICE* misura 36° e ciascuno dei due angoli congruenti del triangolo isoscele *ICR* misura 6°; dunque l'angolo *RIE* misura (36 – 6)° = 30° e l'angolo *ITE* misura (180 – 36 – 30)° = 114°.

C3. (*11 punti*) Gianni ed Elvira giocano in questo modo. Ci sono 66 gettoni sul tavolo: ad ogni turno ognuno di essi può prendere 1 o 2 o 3 o 4 o 5 gettoni. Chi è costretto a prendere l'ultimo gettone perde. Elvira, che vuole vincere, vuole a tutti i costi essere lei ad iniziare. Perché?

Risposta: perché ha una strategia vincente.
Soluzione. Se Elvira inizia prendendo 5 gettoni, Gianni rimane con 61 gettoni e basta che ogni volta che Gianni toglie *N* gettoni Elvira ne tolga 6 – *N* perché alla sua ultima giocata possa lasciare sul tavolo un solo gettone.

C4. (*14 punti*) Il 15 agosto scorso, giorno di Ferragosto, c'è stata la luna piena. Ammettendo che il ciclo lunare sia di 28 giorni esatti, fra quanti anni per la prima volta ci sarà nuovamente la luna piena a Ferragosto? (Se, ad esempio, accadesse l'anno prossimo, dovresti rispondere: fra 1 anno.)

Risposta: 22.
Soluzione. In ogni anno di 365 giorni vi sono 13 mesi lunari di 28 giorni e avanza un giorno; nel caso di anno bisestile avanzano 2 giorni. Quindi bisogna far trascorrere un numero di anni

sufficiente ad accumulare 28*k* giorni (con *k* intero positivo). Poiché il 2020 sarà anno bisestile (e il prossimo anno multiplo di 4 non bisestile sarà il 2100), negli anni successivi al 2019 (prima del 2100) si aggiungeranno giorni secondo lo schema 2 + 1 + 1 + 1 (= 5). Dopo 20 anni ne basteranno dunque 2 per completare un mese lunare di 28 giorni.

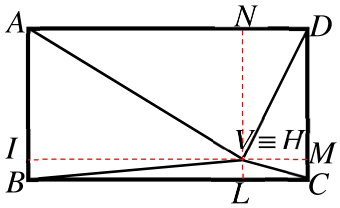
C5. (*18 punti*) In ogni vertice di un quadrato è stato scritto un intero positivo. Se due vertici sono adiacenti, uno dei due interi corrispondenti divide l'altro; se due vertici sono opposti, nessuno dei due interi corrispondenti divide l'altro. Qual è il più piccolo valore possibile per la somma di questi quattro interi?

Risposta: 35.

Soluzione. Su due vertici opposti vanno scritti 2 e 3; sui rimanenti $2^2 \times 3$ e $3^2 \times 2$. È chiaro che è la quaterna ottimale.

C6. (*22 punti*) Di una piramide a base rettangolare sono note le lunghezze di tre dei quattro spigoli obliqui che ne congiungono il vertice *V* con i vertici *A*, *B*, *C*, *D* della base: $\overline{VA}$ = 90 m; $\overline{VB}$ = 70 m; $\overline{VC}$ = 20 m. È possibile determinare la lunghezza dello spigolo *VD*? In caso affermativo determina tale lunghezza, in caso negativo individua le misure di due piramidi che rispettino i dati del problema in cui la lunghezza dello spigolo *VD* sia diverso.

Risposta: è possibile e misura 60 m.



Soluzione. Per fissare le idee supponiamo che la proiezione ortogonale *H* del vertice *V* sulla base *ABCD* cada internamente alla base stessa: in caso contrario la dimostrazione e i calcoli sono analoghi [(1)]. In figura è rappresentato il rettangolo di base della piramide su cui sono stati proiettati ortogonalmente il vertice *V* e gli spigoli obliqui della piramide; *V* coincide quindi, in figura, con *H*. *I*, *L*, *M* e *N* sono invece i piedi delle altezze delle facce. È noto che il segmento *IM* (intersezione della base della piramide con il piano passante per *V* e perpendicolare al lato *AB*) contiene *H* ed è parallelo a *BC* e quindi sono congruenti le terne di segmenti *AN*, *IH* e *BL* e *ND*, *HM*, *LC*. Similmente il segmento *LN* contiene *H* ed è parallelo a *AB* e quindi sono congruenti le terne di segmenti *AI*, *NH* e *DM* e *IB*, *HL*, *MC*. La lunghezza di ogni spigolo obliquo può essere determinata applicando due volte il teorema di Pitagora, ad esempio:

$$\overline{VA}^2 = (\overline{AI}^2+\overline{BL}^2) + \overline{VH}^2.$$

L'altezza *VH* della piramide è l'altezza di ciascuno dei quattro triangoli rettangoli che hanno per ipotenusa uno spigolo obliquo e per vertice opposto *H*; le proiezioni degli spigoli sui lati della base sono a coppie coincidenti e quindi

$$\overline{VA}^2 + \overline{VC}^2 = \overline{VB}^2 + \overline{VD}^2,$$

dunque $\overline{VD}^2 = 90^2 + 20^2 - 70^2 = 3600$.

Tenendo conto che $\overline{VD}^2 = (\overline{AI}^2+\overline{LC}^2) + \overline{VH}^2$, per ottenere che $\overline{VD}^2 = \overline{VA}^2 + \overline{VC}^2 - \overline{VB}^2$, in alternativa all'osservazione sulla coincidenza delle proiezioni degli spigoli, si può sommare la prima e la terza e sottrarre la seconda delle seguenti formule:

$$\overline{VA}^2 = (\overline{AI}^2+\overline{BL}^2) + \overline{VH}^2$$
$$\overline{VB}^2 = (\overline{IB}^2+\overline{BL}^2) + \overline{VH}^2$$
$$\overline{VC}^2 = (\overline{IB}^2+\overline{LC}^2) + \overline{VH}^2.$$

---

(1) Altre configurazioni possibili se il vertice cade al di fuori del rettangolo di base (mantenendo costante l'altezza della piramide):