Quesiti

1. Numeri di sette cifre

Quanti sono i numeri di sette cifre divisibili per 4 e tali che la somma delle loro cifre sia 4?

2. Il prodotto

Due numeri reali a, b sono tali che $a^2 + b^2 + 1007ab = 2018$. Qual è il più grande valore possibile per il prodotto $a \times b$?

3. Tripartizione

Fissato un intero positivo n, vogliamo ripartire i primi $3n$ interi positivi in tre gruppi tali che la somma dei numeri di ciascun gruppo sia la stessa per i tre gruppi. Qual è il più grande intero $n \leq 2018$ per cui possiamo farlo?

4. Clemente perde sempre

Clemente ha N biglie e le distribuisce in due sacchi in modo che il numero delle biglie riposte nel primo sacco e il numero di quelle riposte nel secondo siano primi fra loro. Clemente gioca a carte con Stefania e, quando perde una partita, deve prelevare dal sacco che in quel momento contiene più biglie (da uno dei sacchi, se contenessero lo stesso numero di biglie) il numero di biglie presenti nell'altro sacco e consegnare quelle prelevate a Stefania. Dopo la 13-ma partita Clemente, che ha sempre perso, si ritrova con uno dei due sacchi vuoto. Quanto può valere, al massimo, N ?

5. Due sfere

Due superfici sferiche di raggi 10 e 15 centimetri sono tangenti esternamente; sia Σ quella di raggio 15 cm. Un piano π passa per i due centri e per ognuno dei due centri passa un piano perpendicolare alla retta che congiunge i due centri: sia σ quello che taglia Σ. Su ognuna delle due superfici sferiche i due piani che la intersecano si incontrano in due punti: i quattro punti così individuati determinano un quadrilatero non intrecciato $ABCD$. Siano infine E e F i due punti appartenenti sia a σ sia a Σ più lontani da π. Quanti centimetri cubici misura il volume del solido ottenuto congiungendo ciascuno dei vertici di $ABCD$ con E e con F ?

6. Numeri complementati

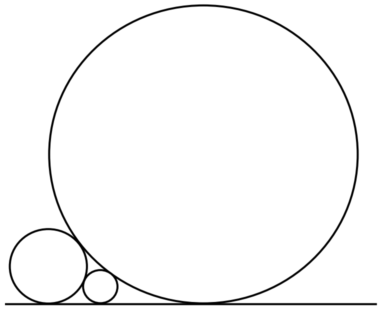
Diciamo che un numero intero positivo è *complementato* se (in notazione decimale) ha almeno due cifre (significative) e se coincide con il prodotto dei complementi a 10 delle sue cifre. Ad esempio, 163 non è complementato mentre lo è 50, come pure lo sono tutti i numeri della forma 5×10^k con $k > 1$. Si sa che non esistono numeri complementati maggiori di 1000 e non multipli di 10. Qual è il più grande numero complementato che non sia un multiplo di 10?

7. Quadrati perfetti

Siano M e N i primi due interi ciascuno dei quali si può esprimere in due modi diversi come somma di due quadrati perfetti non nulli. Quanto vale $M \times N$?

8. Tre cerchi

Tre cerchi hanno raggi le cui misure sono espresse da numeri interi minori di 100. La misura del maggiore dei raggi è il prodotto delle altre due misure. I tre cerchi sono tangenti a due a due e sono tutti tangenti ad una stessa retta. Quanto misura il maggiore dei raggi?



9. I segnali

Un treno viaggia a velocità costante. Per ragioni di sicurezza, ogni 35 metri percorsi il macchinista riceve un segnale in cabina. Immediatamente dopo aver ricevuto un segnale, il macchinista inserisce un contatore del numero di segnali ricevuti. Per quanti secondi dovrà funzionare il contatore affinché il numero di segnali ricevuti uguagli la velocità del treno espressa in chilometri all'ora?

10. Il numero primo

Qual è il più grande numero primo di tre cifre tale che la somma delle sue cifre sia un numero primo di due cifre, la somma delle cui cifre sia a sua volta un numero primo?

11. Palindromi

C'è un solo numero palindromo n di quattro cifre tale che $17 \times n$ sia un quadrato perfetto. Qual è?

12. L'occhio

I due cateti di un triangolo rettangolo misurano $\sqrt{3}$ e 1 metri. Si considerino i due cerchi ciascuno dei quali ha come diametro uno dei cateti. Quanti decimetri quadrati misura l'area dell'intersezione di questi due cerchi? Scrivete la risposta approssimata all'intero più vicino, assumendo che valgano esattamente le uguaglianze $\sqrt{3} = 1{,}73$ e $\pi = 3{,}14$.

13. Potenze scambiate

Per due interi positivi m e n accade che $m^5 + n^3 = 7901$. Quanto vale $m^3 + n^5$?

14. I gettoni

In una griglia quadrata 50×50 le celle sono quadrati tutti uguali fra loro; due celle si dicono adiacenti se condividono un lato. Su ogni cella vengono depositati alcuni gettoni, eventualmente nessuno, e il numero complessivo dei gettoni presenti sulla griglia è k. Si fa il seguente gioco:
ad ogni mossa si parte da una cella, se esiste, che contenga un numero di gettoni non inferiore al numero di celle adiacenti e da questa cella si trasferisce un gettone in ognuna delle celle adiacenti. Il gioco termina se non esistono più celle dalle quali partire. Qual è il minimo valore di k che permette di continuare indefinitamente il gioco, qualunque sia la configurazione iniziale e qualunque sia, ad ogni mossa, la scelta della cella ammissibile a cui sottrarre i gettoni?

15. Coppie di interi

Per quante coppie (ordinate) di numeri interi (x,y) si ha $2|x| + 3|y| < 23$?

Kangourou della Matematica 2018
Coppa Junior a squadre
Finale
Cervia, 7 maggio 2018

Quesiti e svolgimenti

1. Numeri di sette cifre

Quanti sono i numeri di sette cifre divisibili per 4 e tali che la somma delle loro cifre sia 4?

Risposta: 0041.
Soluzione. Ce ne sono:
1 che inizia per 4;
4 che iniziano per 3;
5 che iniziano per 2 e non hanno cifra 1;
6 che iniziano per 2 e hanno due cifre 1;
4 che iniziano per 1 e hanno la cifra 3;
17 che iniziano per 1 e hanno la cifra 2;
4 che hanno solo la cifra 1.

2. Il prodotto

Due numeri reali a, b sono tali che $a^2 + b^2 + 1007ab = 2018$. Qual è il più grande valore possibile per il prodotto $a \times b$?

Risposta: 0002.
Soluzione. Da $1009ab = 2018 - a^2 - b^2 + 2ab = 2018 - (a - b)^2$, segue che il prodotto è massimo, ed è 2, quando $a = b = \sqrt{2}$.

3. Tripartizione

Fissato un intero positivo n, vogliamo ripartire i primi $3n$ interi positivi in tre gruppi tali che la somma dei numeri di ciascun gruppo sia la stessa per i tre gruppi. Qual è il più grande intero $n \leq 2018$ per cui possiamo farlo?

Risposta: 2018
Soluzione. È possibile farlo per ogni $n > 1$. Infatti è possibile farlo per $n = 2$ ($\{1,6\}\{2,5\}\{3,4\}$) e per $n = 3$ ($\{1,2,3,4,5\}\{6,9\}\{7,8\}$). Allora basta dimostrare che, se si può farlo per n, si può farlo per $n + 2$. Ciò è vero perché, avendo i tre gruppi realizzati nel caso n, come suggerito dal caso $n = 2$ si può aggiungere ad un gruppo la coppia $\{3n + 1, 3n + 6\}$, ad un altro la coppia $\{3n + 2, 3n + 5\}$ e all'ultimo la coppia $\{3n + 3, 3n + 4\}$.

4. Clemente perde sempre

Clemente ha N biglie e le distribuisce in due sacchi in modo che il numero delle biglie riposte nel primo sacco e il numero di quelle riposte nel secondo siano primi fra loro. Clemente gioca a carte con Stefania e, quando perde una partita, deve prelevare dal sacco che in quel momento contiene più biglie (da uno dei sacchi, se contenessero lo stesso numero di biglie) il numero di biglie presenti nell'altro sacco e consegnare quelle prelevate a Stefania. Dopo la 13-ma partita Clemente, che ha sempre perso, si ritrova con uno dei due sacchi vuoto. Quanto può valere, al massimo, N ?

Risposta: 0610.

Soluzione. Se uno dei sacchi è vuoto, Clemente può continuare a giocare senza pagare. Per massimizzare N, si deve supporre allora che uno dei due sacchi risulti vuoto solo dopo la 13-ma partita e che quindi, dopo la 12-ma partita, i due sacchi contengano lo stesso numero positivo n di biglie: volendo massimizzare N e avendo solo 11 altre partite a disposizione, dopo la 11-ma le biglie contenute dovevano essere $2n$ e n, dopo la 10-ma $2n$ e $3n$ e così via, dunque $233n$ e $377n$ prima della prima. Essendo i numeri primi tra loro, deve essere $n = 1$.
Curiosità. La situazione descritta ricalca l'algoritmo euclideo delle differenze successive per il calcolo del MCD tra due numeri; inoltre il numero di biglie contenute nei sacchi a ogni partita sono ovviamente i numeri di Fibonacci (a_1=1, a_2=1, a_{n+1}=a_n+a_{n-1}; dopo la prima partita nei sacchetti ci sono $a_n = a_{13}$ e $a_{n-1} = a_{12}$ biglie). Notare infine che per realizzare la situazione di minimo non banale bastano invece 13+1=14 biglie.

5. Due sfere

Due superfici sferiche di raggi 10 e 15 centimetri sono tangenti esternamente; sia Σ quella di raggio 15 cm. Un piano π passa per i due centri e per ognuno dei due centri passa un piano perpendicolare alla retta che congiunge i due centri: sia σ quello che taglia Σ. Su ognuna delle due superfici sferiche i due piani che la intersecano si incontrano in due punti: i quattro punti così individuati determinano un quadrilatero non intrecciato $ABCD$. Siano infine E e F i due punti appartenenti sia a σ sia a Σ più lontani da π. Quanti centimetri cubici misura il volume del solido ottenuto congiungendo ciascuno dei vertici di $ABCD$ con E e con F ?

Risposta: 6250.
Soluzione. Il volume cercato è il doppio del volume della piramide retta avente per base il trapezio $ABCD$ e altezza 15 cm. L'area del trapezio $ABCD$ vale 625 cm^2.

6. Numeri complementati

Diciamo che un numero intero positivo è *complementato* se (in notazione decimale) ha almeno due cifre (significative) e se coincide con il prodotto dei complementi a 10 delle sue cifre. Ad esempio, 163 non è complementato mentre lo è 50, come pure lo sono tutti i numeri della forma 5×10^k con $k > 1$. Si sa che non esistono numeri complementati maggiori di 1000 e non multipli di 10. Qual è il più grande numero complementato che non sia un multiplo di 10?

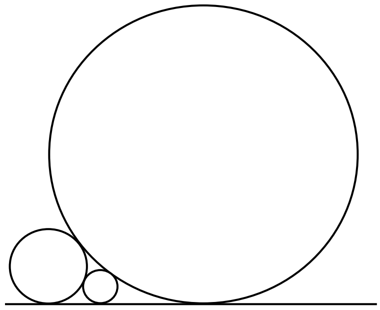
Risposta: 0315.
Soluzione. È facile vedere che il più grande numero complementato di due cifre che non sia un multiplo di 10 è 35 (l'altro complementato è 18).
Perché il numero ABC di tre cifre sia complementato occorre che si abbia
$100A + 10B + C = (10 - A)(10 - B)(10 - C)$, da cui segue facilmente che
$C(101 + A \times B)$ deve essere multiplo di 10, e quindi lo deve essere $C(1 + A \times B)$.
Dovendo essere $C \neq 0$, occorre esaminare i tre casi:
1) $A \times B \equiv 9$ mod. 10, 2) C pari non nullo e $A \times B \equiv 4$ mod. 5, 3) $C = 5$ e A, B dispari.
Si vede facilmente che solo l'opzione 3) è praticabile e fornisce la sola soluzione $A = 3$, $B = 1$, $C = 5$.

7. Quadrati perfetti

Siano M e N i primi due interi ciascuno dei quali si può esprimere in due modi diversi come somma di due quadrati perfetti non nulli. Quanto vale $M \times N$?

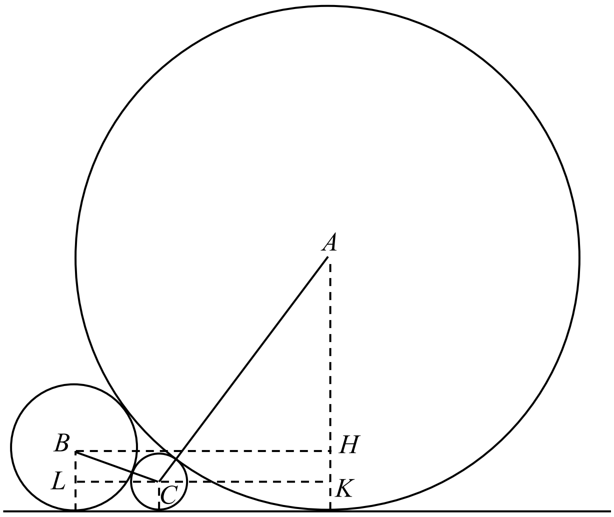
Risposta: 3250.
Soluzione. Prova diretta. I due numeri sono $50 = 5^2 + 5^2 = 1 + 7^2$ e $65 = 4^2 + 7^2 = 1 + 8^2$.

8. Tre cerchi



Tre cerchi hanno raggi le cui misure sono espresse da numeri interi minori di 100. La misura del maggiore dei raggi è il prodotto delle altre due misure. I tre cerchi sono tangenti a due a due e sono tutti tangenti ad una stessa retta. Quanto misura il maggiore dei raggi?

Risposta: 0036.
Soluzione. Siano R, r e p i raggi dei cerchi in ordine decrescente, rispettivamente con centri A, B e C. Siano H, K e L i punti come in figura.



Utilizzando il teorema di Pitagora,
$BH = CK + CL$ si traduce in
$\sqrt{4rR} = \sqrt{4pR} + \sqrt{4pr}$
da cui, essendo $R = pr$, segue
$r\sqrt{p} = p\sqrt{r} + \sqrt{pr}$, cioè $4p = (r - p - 1)^2$.
Allora $p = h^2$ con h intero positivo, da cui
$r = (h + 1)^2$ e di conseguenza $R = h^2(h + 1)^2$.
$h = 1$ comporterebbe $R = r$ che è da escludere.
$h = 2$ fornisce $R = 36$, accettabile.
Da $h = 3$ in poi si avrebbe $R > 100$.

9. I segnali

Un treno viaggia a velocità costante. Per ragioni di sicurezza, ogni 35 metri percorsi il macchinista riceve un segnale in cabina. Immediatamente dopo aver ricevuto un segnale, il macchinista inserisce un contatore del numero di segnali ricevuti. Per quanti secondi dovrà funzionare il contatore affinché il numero di segnali ricevuti uguagli la velocità del treno espressa in chilometri all'ora?

Risposta: 0126.
Soluzione. Se v è la velocità in km/h, $v/3{,}6$ è la velocità in m/s e $v/(3{,}6 \times 35) = v/126$ è il numero di segnali per secondo.

10. Il numero primo

Qual è il più grande numero primo di tre cifre tale che la somma delle sue cifre sia un numero primo di due cifre, la somma delle cui cifre sia a sua volta un numero primo?

Risposta: 0977.
Soluzione. La somma delle cifre del numero cercato deve essere inferiore a 27. I numeri primi di due cifre minori di 27 sono 11, 13, 17, 19 e 23. Solo 11 e 23 vanno esaminati. Iniziamo da 23 e dai numeri di tre cifre che iniziano con 9: le possibilità sono 995, 986, 977, 968, 959. In effetti 977 è primo. È chiaro poi che 11 non può essere la somma delle cifre di un numero di tre cifre maggiore di 977.

11. Palindromi

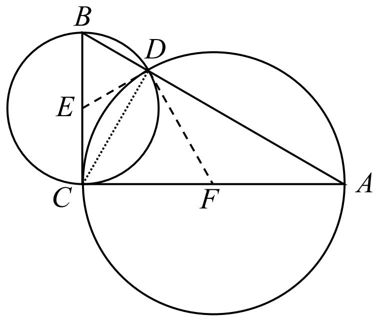
C'è un solo numero palindromo n di quattro cifre tale che $17 \times n$ sia un quadrato perfetto. Qual è?

Risposta: 8228.
Soluzione. Il numero può essere scritto come *ABBA* e quindi è sicuramente divisibile per 11, anzi per $17 \times 11^2 = 2057$, dato che si sa che $17 \times n$ è un quadrato perfetto. Il prodotto di 2057 per un quadrato perfetto m dà un numero di 4 cifre solo se m è 1, ma n non risulterebbe palindromo, oppure 4: effettivamente $2057\times 4 = 8228$ è palindromo.

12. L'occhio

I due cateti di un triangolo rettangolo misurano $\sqrt{3}$ e 1 metri. Si considerino i due cerchi ciascuno dei quali ha come diametro uno dei cateti. Quanti decimetri quadrati misura l'area dell'intersezione di questi due cerchi? Scrivete la risposta approssimata all'intero più vicino, assumendo che valgano esattamente le uguaglianze $\sqrt{3} = 1{,}73$ e $\pi = 3{,}14$.

Risposta: 0022.



Soluzione. Siano AC e CB i due cateti di lunghezze rispettivamente $\sqrt{3}$ e 1: chiaramente l'angolo in A misura 30° e quello in B misura 60°. I punti B, C e l'intersezione D di AB con la circonferenza di diametro BC, individuano un triangolo rettangolo in D (in quanto inscritto in una semicirconferenza); simmetricamente, anche CAD è rettangolo in D e i due triangoli sono simili ad ABC. Detti E ed F i centri dei cerchi di diametro rispettivamente BC e CA, l'area cercata è la differenza fra l'area del settore circolare EDC e l'area del triangolo EDC, sommata alla differenza fra l'area del settore circolare CDF e l'area del triangolo CDF, cioè la differenza tra la somma dei due settori circolari e metà dell'area di ABC. Dato che l'angolo alla circonferenza $\hat{A}$ misura 30° il corrispondente angolo al centro ne misura 60° e simmetricamente l'angolo al centro $\hat{E}$ misura 120° e la somma delle aree dei due settori è $(1/2)^2\pi/3+(\sqrt{3}/2)^2\pi/6=5\pi/24$ m^2, mentre la metà dell'area di ABC è $\sqrt{3}/4$ m^2. In dm^2 l'area è quindi $(5\pi - 6\sqrt{3})\times 100/24$.
Usando le approssimazioni suggerite si trova $(1570 - 1038)/24 = 22{,}1(6)$ cioè 22 dm^2.

13. Potenze scambiate

Per due interi positivi m e n accade che $m^5 + n^3 = 7901$. Quanto vale $m^3 + n^5$?

Risposta: 3341.
Soluzione. Le prime quinte potenze degli interi positivi sono 1, 32, 243, 1024, 3125, 7776, …. Deve quindi essere $m \le 6$. Facilmente si trova che solo $m = 6$ e $n = 5$ sono accettabili (infatti sottraendo ogni altra quinta potenza da 7901 non si ottiene un cubo).

14. I gettoni

In una griglia quadrata 50×50 le celle sono quadrati tutti uguali fra loro; due celle si dicono adiacenti se condividono un lato. Su ogni cella vengono depositati alcuni gettoni, eventualmente nessuno, e il numero complessivo dei gettoni presenti sulla griglia è k. Si fa il seguente gioco:
ad ogni mossa si parte da una cella, se esiste, che contenga un numero di gettoni non inferiore al numero di celle adiacenti e da questa cella si trasferisce un gettone in ognuna delle celle adiacenti. Il gioco termina se non esistono più celle dalle quali partire. Qual è il minimo valore di k che permette di continuare indefinitamente il gioco, qualunque sia la configurazione iniziale e qualunque sia, ad ogni mossa, la scelta della cella ammissibile a cui sottrarre i gettoni?

Risposta: 7301.

Soluzione. Si ha $k = h + 1$, dove h è il massimo dei gettoni che possono essere presenti sulla griglia quando non è possibile iniziare il gioco, cioè è il numero dei gettoni presenti quando ogni cella contiene un numero di gettoni inferiore di 1 al numero delle celle adiacenti. Infatti, se una qualunque delle celle contiene almeno $h + 1$ gettoni, il gioco può iniziare e, dopo ogni mossa, c'è almeno una cella da cui effettuare la mossa (principio dei "cassetti" o "piccioni" che dir si voglia). Vi sono 48^2 celle che hanno 4 celle adiacenti, 4×48 celle che ne hanno 3 e 4 celle che ne hanno 2. Allora $h = 3 \times 48^2 + 2 \times 4 \times 48 + 4 = 7.300$.

15. Coppie di interi

Per quante coppie (ordinate) di numeri interi (x,y) si ha $2|x| + 3|y| < 23$?

Risposta: 0169

Soluzione. Può essere solo $0 \leq |y| \leq 7$. Per

- $y = 0$ ci sono 12 valori ammissibili di $|x|$ ma uno è 0, dunque 23 coppie;
- $0 < |y| < 7$ ci sono complessivamente 39 valori ammissibili di $|x|$ ma 6 sono 0, dunque 144 coppie;
- $|y| = 7$ l'unico valore ammissibile di x è 0, dunque 2 coppie.