Kangourou della Matematica 2018
Coppa Kangourou a squadre
Finale
Cervia, 4 maggio 2018

Quesiti

1. Decine e unità

Quali sono, nell’ordine, la cifra delle decine e quella delle unità del risultato della somma

$$9^{2017} + 9^{2018} \ ?$$

2. Il quadrilatero

In un quadrilatero (non intrecciato) *ABCD*, gli angoli $\widehat{ABD}$, $\widehat{CBD}$ e $\widehat{CAD}$ misurano tutti 40 gradi. Quanti gradi misura l'angolo $\widehat{ADC}$?

3. Quante cifre

Considera tutti i numeri interi del tipo 5, 55, 555, 5555, 55555, ... , cioè tutti i numeri interi positivi nella cui scrittura decimale compare solo la cifra 5. Quante cifre ha il più piccolo di questi numeri che sia divisibile per 495?

4. Sconto esagerato

Per vendere un prodotto che ha in abbondanza, un negoziante ne riduce il prezzo del 60%. Ora si accorge però che lo sconto è troppo forte: il prezzo che gli conviene imporre è la media tra l'originale e quello scontato. Di quale percentuale deve aumentare il prezzo scontato? (*Scrivete solo il numero, ad esempio scrivete 0003 per indicare il 3%.*)

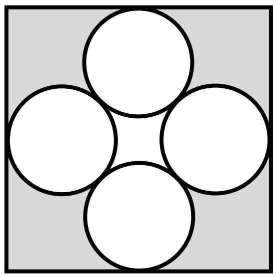
5. I divisori

Qual è la somma di tutti i divisori interi positivi di 2 cifre del numero $2^{16} - 1$?

6. Trentaquattro volte

Qual è il più grande numero intero di tre cifre che è uguale a 34 volte la somma delle sue cifre?

7. Quattro cerchi



La figura mostra un quadrato che contiene quattro cerchi. Ciascuno di essi

- ha raggio 3 cm,
- è tangente a uno dei lati del quadrato nel suo punto medio,
- è tangente ad altri due cerchi.

Quanti centimetri quadrati vale l’area della regione ombreggiata? (*Scrivete il numero intero più vicino al valore esatto dell’area; per determinarlo, usate le approssimazioni che ritenete idonee allo scopo.*)

8. A prodotto zero
Quanti sono i numeri (interi positivi) di 4 cifre significative il prodotto delle cui cifre è 0?

9. Il trapezio
Un trapezio isoscele *ABCD* ha basi *AB* e *CD* lunghe rispettivamente 7 cm e 3 cm. Le sue diagonali *AC* e *BD* si intersecano in un punto *H*. Quale percentuale della superficie del trapezio è occupata dal triangolo *AHD*? *Attenzione: nella risposta la scrittura % va sottintesa*.

10. Il concorso
In un concorso canoro i 41 concorrenti sono numerati da 1 a 41. Possono esibirsi in coppia (ogni coppia una sola volta), ma solo se la somma dei numeri attribuiti ai concorrenti che compongono la coppia è strettamente maggiore di 41. Quante diverse coppie possono esibirsi al massimo durante il concorso? (Due coppie si intendono diverse se differiscono per almeno uno dei componenti.)

11. La somma
Daniele ha usato una lavagna magnetica e dei numeri magnetici per eseguire un'addizione tra due numeri di due cifre. Poi le cifre degli addendi e della somma sono state riordinate in ordine crescente e ora sulla lavagna si vede il seguente allineamento di cifre e simboli:

2 3 6 7 8 9 + =

Quale era il risultato dell'addizione?

12. Riduci a una cifra
Francesco fa questo gioco: moltiplica tra loro le cifre di un numero di due cifre e, se il risultato è un numero di due cifre, moltiplica nuovamente le cifre. Egli continua in questo modo finché non ottiene un numero di una cifra sola. Da quanti numeri può ottenere zero come risultato finale?

13. Numeri parenti
Diciamo che due numeri interi positivi sono "parenti" se hanno uguale somma dei quadrati delle cifre. Ad esempio i numeri 1111, 20 e 2 sono parenti. Quanti sono i numeri interi positivi parenti di 2018 e strettamente minori di 2018?

14. Due dadi strani
Nicola ha due dadi non truccati, ma non tradizionali: in uno vi sono una faccia con 1 punto, due facce con 2 punti e tre facce con 3 punti; nell'altro una faccia con 6 punti, due facce con 5 punti e tre facce con 4 punti. Qual è la probabilità che, lanciando i due dadi, la somma dei punti che Nicola ottiene sia 7? *Scrivete il numeratore della frazione,* ***ridotta ai minimi termini****, seguito dal denominatore: ad esempio, se il risultato fosse* 3/23*, scrivete* 0323.

15. Frazioni
Quante sono le frazioni positive irriducibili e minori di 1 tali che la somma del numeratore e del denominatore sia 2018?

Kangourou della Matematica 2018
Coppa Kangourou a squadre
Finale
Cervia, 4 maggio 2018

Quesiti e svolgimenti

1. Decine e unità

Quali sono, nell'ordine, la cifra delle decine e quella delle unità del risultato della somma

$$9^{2017} + 9^{2018} \,?$$

Risposta: 0090.
Soluzione. $9^{2017} + 9^{2018} = 9^{2017}(1 + 9)$ e 9^{2017} ha 9 come cifra delle unità.

2. Il quadrilatero

In un quadrilatero (non intrecciato) *ABCD*, gli angoli $\widehat{ABD}$, $\widehat{CBD}$ e $\widehat{CAD}$ misurano tutti 40 gradi. Quanti gradi misura l'angolo $\widehat{ADC}$?

Risposta: 0100.
Soluzione. Gli angoli $\widehat{CAD}$ e $\widehat{CBD}$ (che insistono sul lato *CD)* sono uguali per cui il quadrilatero è inscrittibile in un cerchio (infatti se *B'* è l'intersezione del cerchio circoscritto al triangolo *ACD* con la retta *BD*, l'angolo $\widehat{DB'C}$ è uguale all'angolo $\widehat{DBC}$ e quindi *B'*=*B*) e quindi l'angolo opposto a $\widehat{ABC}$ ne è il supplementare, cioè misura 180-40-40=100 gradi.

3. Quante cifre

Considera tutti i numeri interi del tipo 5, 55, 555, 5555, 55555, ... , cioè tutti i numeri interi positivi nella cui scrittura decimale compare solo la cifra 5. Quante cifre ha il più piccolo di questi numeri che sia divisibile per 495?

Risposta: 0018.
Soluzione. $495 = 5 \times 9 \times 11$. Tutti e soli i numeri con un numero pari di "5" sono divisibili per 11. Allora basta che il numero abbia un numero pari di "5" e sia divisibile per 9.

4. Sconto esagerato

Per vendere un prodotto che ha in abbondanza, un negoziante ne riduce il prezzo del 60%. Ora si accorge però che lo sconto è troppo forte: il prezzo che gli conviene imporre è la media tra l'originale e quello scontato. Di quale percentuale deve aumentare il prezzo scontato? (*Scrivete solo il numero, ad esempio scrivete 0003 per indicare il 3%.*)

Risposta: 0075.
Soluzione. Fatto pari a 100 il prezzo iniziale, quello scontato è 40. Per raggiungere 70 deve aumentare 40 di ¾.

5. I divisori

Qual è la somma di tutti i divisori interi positivi di 2 cifre del numero $2^{16} - 1$?

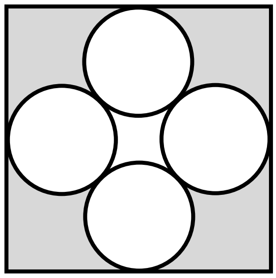
Risposta: 0168.
Soluzione. $2^{16} - 1 = 257 \times 255$. 257 è primo. I fattori primi di 255 sono: 17, 5, 3; gli unici divisori di 2 cifre sono allora 15, 17, 51 e 85.

6. Trentaquattro volte

Qual è il più grande numero intero di tre cifre che è uguale a 34 volte la somma delle sue cifre?

Risposta: 0408.
Soluzione. Se il numero è ABC, deve essere $100A + 10B + C = 34(A + B + C)$, dunque $11(2A - C) = 8B$, che implica $B = 0$ (B deve essere multiplo di 11) da cui $2A = C$.

7. Quattro cerchi



La figura mostra un quadrato che contiene quattro cerchi. Ciascuno di essi

- ha raggio 3 cm,
- è tangente a uno dei lati del quadrato nel suo punto medio,
- è tangente ad altri due cerchi.

Quanti centimetri quadrati vale l'area della regione ombreggiata? (*Scrivete il numero intero più vicino al valore esatto dell'area; per determinarlo, usate le approssimazioni che ritenete idonee allo scopo.*)

Risposta: 0089.
Soluzione. I centri dei cerchi sono i vertici di un quadrato T di lato 6, quindi il quadrato iniziale Q ha lato $6(1 + \sqrt{2})$ e la porzione di Q esterna a T ha area $72(1 + \sqrt{2})$. Occorre ora sottrarre l'area complessiva dei 4 settori circolari, ciascuno di ampiezza 270 gradi, che vale 27π.
$\sqrt{2}$ è compreso fra 1,414 e 1,415; π è compreso fra 3,141 e 3,142. Usando un'approssimazione a sole due cifre si trova che il valore cercato è compreso tra 173,52 – 85,05 = 88,47 e 174,24 – 84,78 = 89,46: basta usare l'approssimazione di $\sqrt{2}$ a tre cifre per vedere che il valore cercato è compreso fra 173, 808 – 85,05 = 88,758 e 173,88 – 84,807 = 89,1: per entrambi questi numeri l'intero più vicino è 89.
Qui sotto sono riportate alcune possibili approssimazioni (nella colonna $\alpha - \beta$ il risultato delle approssimazioni per difetto è ottenuto sottraendo l'approssimazione per eccesso di β dall'approssimazione per difetto di α e similmente per l'approssimazione per eccesso). Tranne la prima coppia, tutte le altre vanno bene per decidere qual è l'intero più vicino.

	$\sqrt{2}$	π	$\alpha = 72(1 + \sqrt{2})$	$\beta = 27\pi$	$\alpha - \beta$
Per difetto a 2 cifre	1,41	3,14	173,52	84,78	88,470
Per eccesso a 2 cifre	1,42	3,15	174,24	85,05	89,460
Per difetto, α a 2 cifre β a 3 cifre					88,686
Per eccesso, α a 2 cifre β a 3 cifre					89,433
Per difetto, α a 3 cifre β a 2 cifre					88,758
Per eccesso, α a 3 cifre β a 2 cifre					89,100
Per difetto a 3 cifre	1,414	3,141	173,808	84,807	88,974
Per eccesso a 3 cifre	1,415	3,142	173,88	84,834	89,073

8. A prodotto zero

Quanti sono i numeri (interi positivi) di 4 cifre significative il prodotto delle cui cifre è 0?

Risposta: 2439.
Soluzione. Il prodotto delle cifre è 0 se e solo se almeno una delle cifre è 0. I numeri interi di quattro cifre sono $9 \times 10^3 = 9.000$. Quelli che non contengono la cifra 0 sono $9^4 = 6.561$.

9. Il trapezio

Un trapezio isoscele *ABCD* ha basi *AB* e *CD* lunghe rispettivamente 7 cm e 3 cm. Le sue diagonali *AC* e *BD* si intersecano in un punto *H*. Quale percentuale della superficie del trapezio è occupata dal triangolo *AHD*? *Attenzione: nella risposta la scrittura % va sottintesa*.

Risposta: 0021.
Soluzione. I due triangoli isosceli *ABH* e CDH sono simili e quindi le altezze relative alle basi del trapezio sono in rapporto 7:3. Ne segue che l'area dell'unione dei due triangoli ha la forma $(49k+9k)/2$, quella del trapezio ha la forma $(7+3)\times 10k/2$ e quindi la percentuale dell'area del trapezio occupata dai due triangoli è del 58% e quindi ciascuno dei triangoli *AHD* e *BCH* occupano il 21% della superficie del trapezio.

10. Il concorso

In un concorso canoro i 41 concorrenti sono numerati da 1 a 41. Possono esibirsi in coppia (ogni coppia una sola volta), ma solo se la somma dei numeri attribuiti ai concorrenti che compongono la coppia è strettamente maggiore di 41. Quante diverse coppie possono esibirsi al massimo durante il concorso? (Due coppie si intendono diverse se differiscono per almeno uno dei componenti.)

Risposta: 0420.
Soluzione. Ripartiamo a metà i numeri da 1 a 41 in questo modo:

1	2	3	…	20	
41	40	39	…	22	21

È chiaro che ciascuno dei cantanti della prima riga può esibirsi con tanti cantanti della seconda quanti dichiarati dal suo numero (ad es. 20 può esibirsi con 22 e con tutti i numeri >22). Anche 21 può esibirsi con 22 e con tutti i numeri >22. Ogni successivo numero *N* della seconda riga può esibirsi, oltre che con i numeri già conteggiati, con 41-*N* altri numeri. In totale le coppie sono al massimo (1+2+…+20) + (20+19+…+1) = 420.

11. La somma

Daniele ha usato una lavagna magnetica e dei numeri magnetici per eseguire un'addizione tra due numeri di due cifre. Poi le cifre degli addendi e della somma sono state riordinate in ordine crescente e ora sulla lavagna si vede il seguente allineamento di cifre e simboli:

2 3 6 7 8 9 + =

Quale era il risultato dell'addizione?

Risposta: 0067.
Soluzione. È escluso che 8 e 9 siano cifre delle decine degli addendi, poiché il risultato (visto che le cifre a disposizione sono 6) deve essere di due cifre. Similmente se si prende come cifra delle decine di uno degli addendi 7, quella dell'altro potrebbe essere solo 2 ma 76+23=73+26=99; se si prende come cifra delle decine di uno degli addendi 6, quella dell'altro non può essere 3 per motivi simili ai precedenti, ma se fosse 2 avremmo 67+23=90 o 68+23=91 o 68+27=95. Ne segue che le cifre delle decine possono essere solo 2 e 3 e quindi (essendoci a disposizione per le unità solo cifre tali che la somma di due di esse è maggiore di 10) la cifra delle decine della somma è 6; l'unica somma che coinvolge le restanti cifre 7, 8, 9 è 8+9=17. Quindi si ha 28+39=67=29+38.

12. Riduci a una cifra

Francesco fa questo gioco: moltiplica tra loro le cifre di un numero di due cifre e, se il risultato è un numero di due cifre, moltiplica nuovamente le cifre. Egli continua in questo modo finché non ottiene un numero di una cifra sola. Da quanti numeri può ottenere zero come risultato finale?

Risposta: 0024.
Soluzione. Sicuramente tutti i 9 numeri che hanno 0 come cifra delle unità; gli 8 che hanno una cifra pari (diversa da zero) e l'altra uguale a 5; per finire quelli che generano una situazione di questo genere (dei precedenti 8 solo 4 possono essere rappresentati come prodotto di due cifre: 25, 45, 54, 56): 55, 59, 95, 69, 96, 78, 87. Qui la conta si esaurisce poiché non esiste una coppia di cifre il cui prodotto sia uno dei numeri appena elencati.

13. Numeri parenti

Diciamo che due numeri interi positivi sono "parenti" se hanno uguale somma dei quadrati delle cifre. Ad esempio i numeri 1111, 20 e 2 sono parenti. Quanti sono i numeri interi positivi parenti di 2018 e strettamente minori di 2018?

Risposta: 0021.
Soluzione. La somma dei quadrati delle cifre di 2018 è 69=64+4+1=49+16+4=36+16+16+1. Quindi possiamo prendere le sei permutazioni di 128 e le sei permutazioni delle ultime 3 cifre di 1028; le sei permutazioni di 247 e le tre permutazioni delle ultime tre cifre di 1446.

14. Due dadi strani

Nicola ha due dadi non truccati, ma non tradizionali: in uno vi sono una faccia con 1 punto, due facce con 2 punti e tre facce con 3 punti; nell'altro una faccia con 6 punti, due facce con 5 punti e tre facce con 4 punti. Qual è la probabilità che, lanciando i due dadi, la somma dei punti che Nicola ottiene sia 7? *Scrivete il numeratore della frazione, **ridotta ai minimi termini**, seguito dal denominatore: ad esempio, se il risultato fosse* 3/23, *scrivete* 0323.

Risposta: 0718.
Soluzione. Consideriamo distinte fra loro le facce di ogni cubo: gli esiti possibili sono allora 36 coppie equiprobabili. Le coppie favorevoli sono una sola con una faccia 1, quattro con una faccia 2 e nove con una faccia 3.

15. Frazioni

Quante sono le frazioni positive irriducibili e minori di 1 tali che la somma del numeratore e del denominatore sia 2018?

Risposta: 0504.
Soluzione. Numeratore e denominatore devono essere entrambi positivi (poiché quoziente e somma devono essere positivi). Se il numeratore è pari le frazioni non sono irriducibili. Delle 1009 frazioni con numeratore e denominatore dispari, quelle con numeratore ≤ 1007 sono 504 e sono tutte accettabili in quanto, dal momento che $2018 = 2 \times 1009$ e 1009 è primo, si può avere $AB + AC = 2018$ con A, B e C interi positivi se e solo se $A = 1$ o $A = 2$.