



Kangourou della Matematica 2018  
Coppa Kangourou a squadre  
Semifinale turno A  
Cervia, 3 maggio 2018



## Quesiti

### 1. Fra 1 e 2018

Quanti numeri interi fra 1 e 2018 sono multipli sia di 20, sia di 14?

### 2. Un treno

Viaggiando a velocità costante, un treno attraversa due gallerie. La prima è lunga 980 metri e da quando la testa del treno vi entra a quando la coda ne esce trascorrono 30 secondi. La seconda è lunga 790 metri e da quando la testa del treno vi entra a quando la coda ne esce trascorrono 25 secondi. Quanti metri è lungo il treno?

### 3. Le sequenze di Laura

Laura vuole scrivere in sequenza tutti i numeri interi da 1 a 14 inclusi in modo che, per ogni numero della sequenza, accada che esso sia maggiore oppure minore di tutti quelli che lo seguono. Fra quanti allineamenti possibili può scegliere?

### 4. Tre colori

Cristina ha a disposizione 3 colori per colorare i 6 quadrati in cui è ripartita la striscia che vedi in figura. Non è obbligata ad usarli nella stessa quantità e neppure ad usarli tutti e tre, ma deve fare in modo che quadrati adiacenti ricevano colori diversi. In quanti modi diversi può colorare la striscia? *Attenzione: colorazioni che si possano ottenere una dall'altra ruotando la striscia corrispondono a un solo modo.*



### 5. Bianco e nero

Ho una scacchiera  $12 \times 12$ , a celle di colore bianco o nero, alternati come nelle scacchiere tradizionali. In quanti modi posso scegliere due celle, una bianca e una nera, in modo che non stiano né su una stessa riga né su una stessa colonna?

### 6. Due cifre

Di due cifre  $a$  e  $b$  (entrambe non nulle) si sa che  $b/a = a,b$  ( $a,b$  denota un numero non intero in notazione decimale). Quanto vale  $a \times b \times b$ ?

## 7. Evaporazione

Un materiale evapora a tasso costante cioè, a parità di tempo, la percentuale della massa che evapora è la stessa. La massa si dimezza in 8 giorni. Supponete di avere una quantità di quel materiale tale che il quadrato della sua massa sia  $1.479.200 \text{ g}^2$ . Quanti grammi di quel materiale troverete dopo 20 giorni?

## 8. Divisori comuni

Quanti divisori in comune possono avere al massimo due diversi numeri interi positivi di tre cifre? (Fra i divisori di ogni numero vanno inclusi sia 1 sia il numero stesso.)

## 9. Che differenza!

Qual è il risultato di  $20.182.017 \times 20.182.019 - 20.182.015 \times 20.182.021$ ?

## 10. Divisibili per 45

Un numero si dice *palindromo* se coincide con il numero ottenuto leggendo le sue cifre da destra verso sinistra (ad esempio 42324 è palindromo, 42334 non lo è). Considerate tutti numeri palindromi di 5 cifre (significative) divisibili per 45. Quanto vale la differenza fra il più grande e il più piccolo di essi?

## 11. Angoli

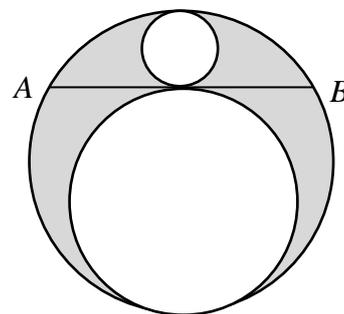
Le misure in gradi degli angoli di un triangolo sono tutte numeri interi (positivi). Uno degli angoli è di 36 gradi più ampio della media degli altri due. Quanti gradi può misurare, al massimo, il più ampio dei tre angoli?

## 12. Il telo

Un telo è un rettangolo di tre metri per due. Piegandolo ripetutamente alcune volte, sempre lungo la retta passante per il centro e parallela al lato che risulta più corto al momento della piegatura, si ottiene un rettangolo la cui area è  $7.500 \text{ cm}^2$ . Quanti centimetri misura il perimetro di quest'ultimo rettangolo?

## 13. Tre cerchi

Guarda la figura: i tre cerchi sono a due a due tangenti e la corda  $AB$  del cerchio grande è tangente ai due cerchi interni. Se l'area della figura grigia ottenuta rimuovendo dal cerchio grande i due cerchi interni è  $18\pi \text{ cm}^2$ , quanti centimetri è lunga la corda?



## 14. Cento potenze

Quanto vale la somma  $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \dots + 97^2 - 98^2 - 99^2 + 100^2$ ?

## 15. Decine e unità

Quali sono, nell'ordine, la cifra delle decine e quella delle unità di  $2^{2019}$ ?



Kangourou della Matematica 2018  
Coppa Kangourou a squadre  
Semifinale turno A  
Cervia, 3 maggio 2018



## Quesiti e svolgimenti

### 1. Fra 1 e 2018

Quanti numeri interi fra 1 e 2018 sono multipli sia di 20, sia di 14?

**Risposta: 0014.**

**Soluzione.** Occorre e basta che siano multipli di 140, dunque sono 14.

### 2. Un treno

Viaggiando a velocità costante, un treno attraversa due gallerie. La prima è lunga 980 metri e da quando la testa del treno vi entra a quando la coda ne esce trascorrono 30 secondi. La seconda è lunga 790 metri e da quando la testa del treno vi entra a quando la coda ne esce trascorrono 25 secondi. Quanti metri è lungo il treno?

**Risposta: 0160.**

**Soluzione.** In 5 secondi il treno percorre  $980 - 790 = 190$  metri, quindi viaggia alla velocità di 38 m/sec. La lunghezza del treno è  $38 \times 30 - 980 = 160$  m.

### 3. Le sequenze di Laura

Laura vuole scrivere in sequenza tutti i numeri interi da 1 a 14 inclusi in modo che, per ogni numero della sequenza, accada che esso sia maggiore oppure minore di tutti quelli che lo seguono. Fra quanti allineamenti possibili può scegliere?

**Risposta: 8192.**

**Soluzione.** Su  $n$  numeri gli allineamenti ammissibili sono  $2^{n-1}$ . Infatti al primo posto a sinistra posso scegliere 1 oppure  $n$ , al secondo scelgo il più piccolo o il più grande dei residui  $n - 1$  e così via; l'ultima scelta la faccio al posto  $n - 1$ .

### 4. Tre colori

Cristina ha a disposizione 3 colori per colorare i 6 quadrati in cui è ripartita la striscia che vedi in figura. Non è obbligata ad usarli nella stessa quantità e neppure ad usarli tutti e tre, ma deve fare in modo che quadrati adiacenti ricevano colori diversi. In quanti modi diversi può colorare la striscia? *Attenzione: colorazioni che si possano ottenere una dall'altra ruotando la striscia corrispondono a un solo modo.*



**Risposta: 0048.**

**Soluzione.** Il primo quadrato a sinistra può ricevere colori in 3 modi diversi, mentre i successivi possono riceverli solo in due modi diversi. Tenendo conto della rotazione:  $3 \times 2^5 / 2$ .

## 5. Bianco e nero

Ho una scacchiera  $12 \times 12$ , a celle di colore bianco o nero, alternati come nelle scacchiere tradizionali. In quanti modi posso scegliere due celle, una bianca e una nera, in modo che non stiano né su una stessa riga né su una stessa colonna?

**Risposta: 4320.**

**Soluzione.** Scelta la prima cella a piacere (tanto per posizione che per colore) tra le 72 di un dato colore, la seconda può essere scelta tra  $72 - 12 = 60$  celle. In totale  $72 \times 60$ .

## 6. Due cifre

Di due cifre  $a$  e  $b$  (entrambe non nulle) si sa che  $b/a = a,b$  ( $a,b$  denota un numero non intero in notazione decimale). Quanto vale  $a \times b \times b$ ?

**Risposta: 0050.**

**Soluzione.** Da  $b/a = a + b/10$  segue  $10a^2 = b(10 - a)$ . Non può essere  $a = 5$ , dunque deve essere  $b = 5$ , da cui  $a = 2$ .

## 7. Evaporazione

Un materiale evapora a tasso costante cioè, a parità di tempo, la percentuale della massa che evapora è la stessa. La massa si dimezza in 8 giorni. Supponete di avere una quantità di quel materiale tale che il quadrato della sua massa sia  $1.479.200 \text{ g}^2$ . Quanti grammi di quel materiale troverete dopo 20 giorni?

**Risposta: 0215.**

**Soluzione.** Se in 8 giorni la massa diventa metà, il suo quadrato diventa la quarta parte e in 4 giorni il suo quadrato diventa la metà. Quindi dopo 20 giorni il quadrato della massa diventa la 32-esima parte della massa iniziale:  $46625 \text{ g}^2$ .

## 8. Divisori comuni

Quanti divisori in comune possono avere al massimo due diversi numeri interi positivi di tre cifre? (Fra i divisori di ogni numero vanno inclusi sia 1 sia il numero stesso.)

**Risposta: 0024.**

**Soluzione:** Per massimizzare occorre usare più di un fattore primo, scelti tra quelli minori.  $2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$  e  $2^3 \times 3^2 \times 5 = 360$  hanno in comune  $4 \times 3 \times 2$  divisori.

## 9. Che differenza!

Qual è il risultato di  $20.182.017 \times 20.182.019 - 20.182.015 \times 20.182.021$ ?

**Risposta: 0008.**

**Soluzione.** L'espressione ha la forma  $(n - 2) n - (n - 4) (n + 2) = 2n - 2n + 8$ .

## 10. Divisibili per 45

Un numero si dice *palindromo* se coincide con il numero ottenuto leggendo le sue cifre da destra verso sinistra (ad esempio 42324 è palindromo, 42334 non lo è). Considerate tutti numeri palindromi di 5 cifre (significative) divisibili per 45. Quanto vale la differenza fra il più grande e il più piccolo di essi?

**Risposta: 9090.**

**Soluzione.** Dovendo i nostri numeri essere divisibili per 5 e non potendo iniziare con 0, la loro prima (e ultima) cifra deve essere 5. Il più grande è allora del tipo  $59X95$  con  $X$  che lo renda divisibile per 9, dunque  $X = 8$ . Analogamente si trova che il più piccolo è  $50805$ .

## 11. Angoli

Le misure in gradi degli angoli di un triangolo sono tutte numeri interi (positivi). Uno degli angoli è di 36 gradi più ampio della media degli altri due. Quanti gradi può misurare, al massimo, il più ampio dei tre angoli?

**Risposta: 0095.**

**Soluzione.** Se  $S$  è la somma delle misure degli altri due angoli, deve essere  $180 = 3S/2 + 36$ , da cui  $S = 96$ . I tre angoli che soddisfano la richiesta sono dunque di 1, 95 e 84 gradi.

## 12. Il telo

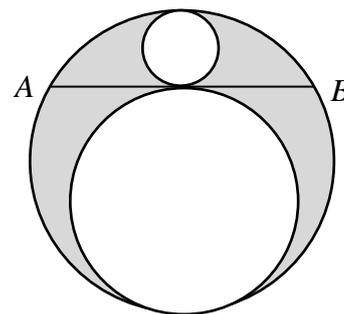
Un telo è un rettangolo di tre metri per due. Piegandolo ripetutamente alcune volte, sempre lungo la retta passante per il centro e parallela al lato che risulta più corto al momento della piegatura, si ottiene un rettangolo la cui area è  $7.500 \text{ cm}^2$ . Quanti centimetri misura il perimetro di quest'ultimo rettangolo?

**Risposta: 0350.**

**Soluzione.** Da una superficie di  $6 \times 10^4 \text{ cm}^2$  ci si riduce ad una superficie di  $75 \times 10^2 = 6 \times 10^4/8 \text{ cm}^2$ : poiché ad ogni piegatura l'area si dimezza, il telo è stato piegato tre volte. Le misure dei lati passano allora da 300 a 75 (per quello inizialmente più lungo) e da 200 a 100 (per l'altro).

## 13. Tre cerchi

Guarda la figura: i tre cerchi sono a due a due tangenti e la corda  $AB$  del cerchio grande è tangente ai due cerchi interni. Se l'area della figura grigia ottenuta rimuovendo dal cerchio grande i due cerchi interni è  $18\pi \text{ cm}^2$ , quanti centimetri è lunga la corda?



**Risposta: 0012.**

**Soluzione.** Siano  $R$  e  $r$  i raggi del cerchio più grande e quello del più piccolo. Per ipotesi  $18 = R^2 - r^2 - (R - r)^2 = 2(Rr - r^2)$ . Applicando il teorema di Pitagora al triangolo che ha  $R$  come ipotenusa e la mezza corda come uno dei cateti si ha  $(AB/2)^2 = R^2 - (R - 2r)^2 = 4(Rr - r^2) = 36$  e quindi  $AB = 12$ .

## 14. Cento potenze

Quanto vale la somma  $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + \dots + 97^2 - 98^2 - 99^2 + 100^2$ ?

**Risposta: 0100.**

**Soluzione.** Raggruppando gli addendi a gruppi di 4 si vede che  $1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 = -3 + 7 = 4$  e in generale  $(1+4k)^2 - (2+4k)^2 - (3+4k)^2 + (4+4k)^2 = -3 - 8k + 7 + 8k = 4$ . Visto che i gruppi sono 25, la somma è  $25 \times 4$ .

## 15. Decine e unità

Quali sono, nell'ordine la cifra delle decine e quella delle unità di  $2^{2019}$ ?

**Risposta: 0088.**

**Sol.** Le potenze di 2, modulo 100, sono:

2; 4, 8, 16, 32; 64, 28, 56, 12; 24, 48, 96, 92; 84, 68, 36, 72; 44, 88, 76, 52; 4, ...

cioè si ripetono dalla seconda in poi con un periodo di 20. Dato che  $2019 = 1 + 20 \times 100 + 18$ , si deve avere come gruppo decine unità il 18-esimo della lista periodica, cioè 88.