LIVELLO STUDENT

Tutte le risposte devono essere giustificate

S1. (*5 punti*) I lati di un quadrilatero misurano 1, 4, 7, 8. Quanto può essere la sua area, al massimo?

S2. (*7 punti*) Da un mazzo standard di 52 carte, Chiara ha scartato alcune carte, assicurandosi che nel mazzo residuo restassero tutti e quattro gli assi. Ora estrae quattro carte a caso da questo mazzo ridotto. Se la probabilità di estrarre esattamente i quattro assi è 1/1001, quante carte ha buttato via?

S3. (*11 punti*) Considera già dimostrato il fatto che l'equazione $x^5 + x = 10$ ammette un'unica soluzione (reale positiva). Dimostra che tale soluzione non è un numero razionale (cioè non può essere espressa come quoziente di due numeri interi).

S4. (*14 punti*) Dimostra che un numero intero di 20 cifre (decimali) le cui 11 prime cifre (da sinistra) sono tutte "1" non può essere un quadrato perfetto.

S5. (*18 punti*) Immagina il piano come un foglio a quadretti (tutti dello stesso lato) illimitato in ogni direzione e chiama *nodo* ogni vertice di ogni quadrato. Dimostra che per ogni *n* esiste un cerchio contenente all'interno esattamente *n* nodi.

S6. (*22 punti*) Chiama "romboso" ogni poligono equilatero convesso se è possibile tassellarlo con un numero finito di rombi aventi lo stesso lato del poligono.
Caratterizza nel modo più esplicito possibile tutti i poligoni equilateri convessi rombosi.

LIVELLO STUDENT

Soluzioni e svolgimenti

S1. (*5 punti*) I lati di un quadrilatero misurano 1, 4, 7, 8. Quanto può essere la sua area, al massimo?

Risposta: 18.

Soluzione. È chiaro che, perché l'area sia massima, il quadrilatero deve quantomeno essere convesso. Inoltre si può supporre che le lunghezze dei lati consecutivi si susseguano in un qualunque ordine prefissato; infatti se ciò non accade, basta scomporre il quadrilatero in due triangoli mediante una diagonale e simmetrizzarne uno rispetto all'asse della diagonale stessa per ottenere un nuovo quadrilatero (ovviamente con la stessa area) in cui accade. Ciascuno dei due triangoli in cui una diagonale scompone il quadrilatero ha area che, mantenendo costanti le misure dei due lati appartenenti al quadrilatero, è massima quando tali lati sono perpendicolari. Si tratta quindi di trovare coppie di lati che possano essere cateti di due triangoli rettangoli con ugual ipotenusa. È immediato che $1^2 + 8^2 = 4^2 + 7^2$, dunque accostando due triangoli rettangoli di cateti {1 e 8} e {4 e 7} si ottiene il quadrilatero cercato, che ha area $1 \times 8/2 + 4 \times 7/2 = 18$.

S2. (*7 punti*) Da un mazzo standard di 52 carte, Chiara ha scartato alcune carte, assicurandosi che nel mazzo residuo restassero tutti e quattro gli assi. Ora estrae quattro carte a caso da questo mazzo ridotto. Se la probabilità di estrarre esattamente i quattro assi è 1/1001, quante carte ha buttato via?

Risposta: 38.

Soluzione. Se le carte residue sono n, la probabilità di estrarre esattamente i quattro assi è

$$p = \frac{4}{n} \times \frac{3}{n-1} \times \frac{2}{n-2} \times \frac{1}{n-3}.$$

$p = 1/1001$ equivale a $n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3) = 24024$. Non potendo chiaramente essere $n < 10$, né n compreso tra 10 e 13 (inclusi), poiché uno dei quattro fattori sarebbe 10, deve essere $n \geq 14$. Si verifica subito che deve essere proprio $n = 14$.

S3. (*11 punti*) Considera già dimostrato il fatto che l'equazione $x^5 + x = 10$ ammette un'unica soluzione (reale positiva). Dimostra che tale soluzione non è un numero razionale (cioè non può essere espressa come quoziente di due numeri interi).

Soluzione. È ovvio che la soluzione è strettamente compresa tra 1 e 2. Se un numero razionale p/q (con p e q interi coprimi positivi) fosse la soluzione, si dovrebbe avere

$$p^5 + pq^4 = 10q^5$$

e quindi p dovrebbe dividere 10, cioè essere 5 o 10, poiché nessuna frazione della forma $1/q$ o $2/q$ è maggiore di 1. In ordine crescente, le frazioni che, ridotte ai minimi termini, hanno 5 o 10 al numeratore e sono minori di 2, sono 10/9, 5/4, 10/7, 5/3 ed è facile verificare che $10^5 + 10\times7^4 < 10\times7^5$ e quindi 10/7 è minore della soluzione, mentre $5^5 + 5\times3^4 > 10\times3^5$ e quindi 5/3 è maggiore della soluzione.

S4. (*14 punti*) Dimostra che un numero intero di 20 cifre (decimali) le cui 11 prime cifre (da sinistra) sono tutte "1" non può essere un quadrato perfetto.

Soluzione. Sia n un tale numero: deve essere

$$11111111111 \times 10^9 \leq n < 11111111111 \times 10^9 + 10^9,$$

cioè $(10^{11} - 1) \times 10^9 \leq 9n < (10^{11} - 1) \times 10^9 + 9 \times 10^9$.

Se fosse $n = k^2$ con k intero, ne seguirebbe l'uguaglianza, evidentemente impossibile, $3k = 10^{10}$: infatti si ha

$$(10^{11} - 1) \times 10^9 = 10^{20} - 10^9 > (10^{10} - 1)^2$$

e

$$(10^{11} - 1) \times 10^9 + 9 \times 10^9 = 10^{20} + 8 \times 10^9 < (10^{10} + 1)^2,$$

da cui $(10^{10} - 1)^2 < 9n < (10^{10} + 1)^2$.

S5. (*18 punti*) Immagina il piano come un foglio a quadretti (tutti dello stesso lato) illimitato in ogni direzione e chiama *nodo* ogni vertice di ogni quadrato. Dimostra che per ogni n esiste un cerchio contenente all'interno esattamente n nodi.

Soluzione. Si doti il piano di un sistema cartesiano ortogonale $0xy$ in cui i nodi siano esattamente i punti a coordinate intere e si consideri, ad esempio, il punto

$$P \equiv (\sqrt{2}, \sqrt{3}).$$

Nessuna circonferenza centrata in P può contenere più di un nodo. Infatti se due nodi (a,b) e (c,d) avessero da P la stessa distanza, cioè se

$$(a - \sqrt{2})^2 + (b - \sqrt{3})^2 = (c - \sqrt{2})^2 + (d - \sqrt{3})^2,$$

esisterebbe una combinazione $h\sqrt{2} + k\sqrt{3}$ mediante due interi h e k di $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ che è un intero N, ma ciò è impossibile in quanto, ad esempio, quadrando i due membri dell'uguaglianza $k\sqrt{3} = N - h\sqrt{2}$ si otterrebbe che $\sqrt{2}$ è razionale.

È ovvio che un cerchio centrato in P di raggio sufficientemente piccolo non contiene nodi.

Poiché esistono infiniti nodi, ma ogni regione limitata di piano contiene solo un numero finito di nodi, per quanto visto sopra, al crescere del raggio in modo opportuno, si potrà aggiungere esattamente un nodo alla volta.

S6. (*22 punti*) Chiama "romboso" ogni poligono equilatero convesso se è possibile tassellarlo con un numero finito di rombi aventi lo stesso lato del poligono.
Caratterizza nel modo più esplicito possibile tutti i poligoni equilateri convessi rombosi.

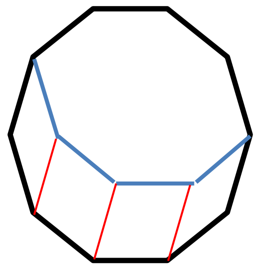
Risposta: un poligono equilatero convesso è romboso se e solo se per ognuno dei suoi lati ve ne è un altro (ed un solo altro per via della convessità) ad esso parallelo. (Ne segue in particolare che il poligono deve avere un numero pari di lati).

Soluzione. Suppongo che il poligono sia romboso. La strategia consiste nel seguire una striscia di rombi aventi almeno un lato parallelo a un lato del poligono dato.

Ogni lato del poligono deve essere un lato di almeno un rombo e di fatto di uno solo, dato che i rombi devono avere misura dei lati che è esattamente quella del lato del poligono.

Parto dunque da un lato l del poligono, e considero, nel rombo che lo ha come lato, il lato a_1 ad esso parallelo, che sarà a sua volta il lato di un altro rombo della tassellazione e che, se è distinto dal precedente, avrà un lato a_2 parallelo ad a_1 e quindi a l e così via; è chiaro che la costruzione non può continuare indefinitamente, dato che ho supposto che la tassellazione sia fatta da un numero finito di rombi; quindi uno dei lati paralleli a l dei rombi così costruiti deve essere a sua volta un lato del poligono romboso. Poiché questa procedura è valida per ogni lato, ne segue che ogni lato del poligono è parallelo a un altro lato (e a uno solo per ovvie ragioni di convessità) e quindi il poligono ha un numero pari lati.

Viceversa posso mostrare che tutti i poligoni equilateri convessi tali che ogni lato ne ammetta uno parallelo sono rombosi usando un procedimento induttivo. Innanzi tutto è chiaro che un quadrilatero equilatero con lati opposti paralleli è un rombo e quindi è romboso. Supponiamo ora che tutti i poligoni equilateri di cui sopra e aventi $2n$ lati siano rombosi e mostriamo che la stessa cosa succede per quelli aventi $2n+2$ lati.



Consideriamo $n+2$ vertici consecutivi del poligono: come suggerito dal disegno, i primi 3 individuano due lati consecutivi di un rombo che posso completare con i restanti due lati; proseguendo con la stessa costruzione già utilizzata nella dimostrazione della condizione necessaria, individuo $n-1$ rombi, ciascuno con due lati paralleli al primo lato del primo rombo (e la costruzione si chiude per l'ipotesi di parallelismo). Quello che rimane è un poligono convesso che ha esattamente $2n$ lati tutti congruenti e quindi per l'ipotesi induttiva è romboso: dunque anche il poligono di partenza lo è.