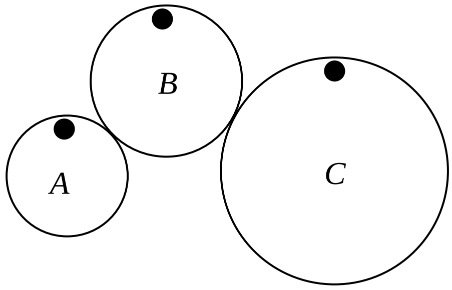
LIVELLO CADET

Tutte le risposte devono essere giustificate



C1. (*5 punti*) Un ingranaggio è composto da tre ruote dentate *A*, *B* e *C* . *A* ha 16 denti, *B* ne ha 20 e *C* ne ha 30. Come suggerisce la figura, *B* è a contatto sia con *A* sia con *C* (cioè i denti di *B* agganciano sia quelli di *A* sia quelli di *C*), ma *A* non è a contatto con *C* . Ogni ruota ha una tacca. In questo istante l'ingranaggio si mette in moto: quanti giri dovrà fare la ruota *B* prima che tutte e tre le tacche ritornino contemporaneamente, per la prima volta, nella posizione attuale?

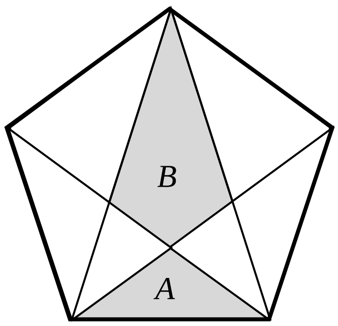
C2. (*7 punti*) Eugenio fa il magazziniere. Sa che domani alcuni coltivatori gli porteranno ciascuno lo stesso numero di cassette di mele e che lui dovrà ripartire le cassette su 7 furgoni, in modo che tutti i furgoni viaggino con lo stesso numero di cassette. Il numero dei coltivatori coincide con il numero di cassette che ciascun coltivatore gli porterà. Eugenio sa che se, dopo che avrà distribuito il maggior numero possibile di cassette sui 7 furgoni, avanzerà qualche cassetta, potrà tenerla per sé. Quante cassette potrebbe capitargli di tenere per sé, al massimo?

C3. (*11 punti*) A Kanglandia circolano esattamente un milione di auto. Le loro targhe, tutte diverse fra loro, hanno sei cifre: i numeri sono dunque compresi fra 000000 e 999999. Per ogni auto si sommano le cifre della targa e si ripartiscono le auto in gruppi, in modo che tutte le auto di uno stesso gruppo forniscano la stessa somma e gruppi diversi siano relativi a somme diverse. Quante auto hanno complessivamente i sei gruppi meno numerosi?

C4. (*14 punti*) Antonia e Luca si giocano a testa o croce la cifra di 8 euro, lanciando una moneta non truccata. Decidono che la cifra sarà intascata dal primo di loro che avrà avuto 6 lanci a proprio favore. Quando sono sul punteggio di 5 per Antonia e 3 per Luca, sono però costretti ad interrompere il gioco e discutono su come spartirsi gli 8 euro (che nessuno finora ha vinto). Qual è il modo equo di spartirli (cioè il modo che tiene conto della probabilità di vittoria che ognuno dei due ha al momento dell'interruzione)?

C5. (*18 punti*) Da un mazzo standard di 52 carte, Chiara ha scartato alcune carte, assicurandosi che nel mazzo residuo restassero tutti e quattro gli assi. Ora estrae quattro carte a caso da questo mazzo ridotto. Se la probabilità di estrarre esattamente i quattro assi è 1/1001, quante carte ha buttato via?

C6. (*22 punti*) In figura vedi un pentagono regolare di cui sono state tracciate quattro diagonali che individuano due regioni ombreggiate *A* e *B*. Esprimi l'area di *B* in dipendenza dall'area di *A*.

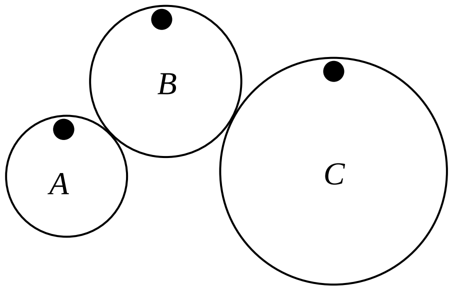


Kangourou della Matematica 2018
finale nazionale italiana
Cervia, 29 settembre 2018

LIVELLO CADET

Soluzioni e svolgimenti

C1. (*5 punti*) Un ingranaggio è composto da tre ruote dentate *A*, *B* e *C*. *A* ha 16 denti, *B* ne ha 20 e *C* ne ha 30. Come suggerisce la figura, *B* è a contatto sia con *A* sia con *C* (cioè i denti di *B* agganciano sia quelli di *A* sia quelli di *C*), ma *A* non è a contatto con *C*. Ogni ruota ha una tacca. In questo istante l'ingranaggio si mette in moto: quanti giri dovrà fare la ruota *B* prima che tutte e tre le tacche ritornino contemporaneamente, per la prima volta, nella posizione attuale?



Risposta: 12.
Soluzione. Il più piccolo numero intero divisibile sia per 16, sia per 20, sia per 30 è $2^4 \times 3 \times 5 = 20 \times 12$.

C2. (*7 punti*) Eugenio fa il magazziniere. Sa che domani alcuni coltivatori gli porteranno ciascuno lo stesso numero di cassette di mele e che lui dovrà ripartire le cassette su 7 furgoni, in modo che tutti i furgoni viaggino con lo stesso numero di cassette. Il numero dei coltivatori coincide con il numero di cassette che ciascun coltivatore gli porterà. Eugenio sa che se, dopo che avrà distribuito il maggior numero possibile di cassette sui 7 furgoni, avanzerà qualche cassetta, potrà tenerla per sé. Quante cassette potrebbe capitargli di tenere per sé, al massimo?

Risposta: 4.
Soluzione. Se n è il numero di coltivatori, a Eugenio arriveranno n^2 cassette; ora $n^2 / 7$ può dare solo resto 0 o 1 o 2 o 4 (infatti per $n = 7k + h$ si ha $n^2 = 49k^2 + 14hk + h^2$: i resti di $n^2 / 7$ sono dunque tutti e soli i resti di $h^2 / 7$ con h intero che varia da 0 a 6 inclusi).

C3. (*11 punti*) A Kanglandia circolano esattamente un milione di auto. Le loro targhe, tutte diverse fra loro, hanno sei cifre: i numeri sono dunque compresi fra 000000 e 999999. Per ogni auto si sommano le cifre della targa e si ripartiscono le auto in gruppi, in modo che tutte le auto di uno stesso gruppo forniscano la stessa somma e gruppi diversi siano relativi a somme diverse. Quante auto hanno complessivamente i sei gruppi meno numerosi?

Risposta: 56.

Soluzione. Ci sono due gruppi con un'auto ciascuno (somma 0 e somma 9 × 6 = 54), due gruppi con 6 auto ciascuno (somma 1 e somma 9 × 5 + 8 = 53), due gruppi con 21 auto ciascuno (somma 2 e somma 52; quello con somma 2 è costituito da 6 auto con una cifra 2 e cinque cifre 0 e 15 auto con due cifre 1 e quattro cifre 0, l'altro in modo simmetrico). Tutti gli altri gruppi sono ovviamente più numerosi.

C4. (*14 punti*) Antonia e Luca si giocano a testa o croce la cifra di 8 euro, lanciando una moneta non truccata. Decidono che la cifra sarà intascata dal primo di loro che avrà avuto 6 lanci a proprio favore. Quando sono sul punteggio di 5 per Antonia e 3 per Luca, sono però costretti ad interrompere il gioco e discutono su come spartirsi gli 8 euro (che nessuno finora ha vinto). Qual è il modo equo di spartirli (cioè il modo che tiene conto della probabilità di vittoria che ognuno dei due ha al momento dell'interruzione)?

Risposta: 7 euro ad Antonia e 1 a Luca.

Soluzione. Immaginiamo che il gioco vada comunque avanti per 3 lanci (anche se Antonia vincesse prima): si avrebbe senz'altro il vincitore. 3 lanci hanno, nel complesso, 8 esiti possibili. Di questi 8, solo uno darebbe la vittoria a Luca.

C5. (*18 punti*) Da un mazzo standard di 52 carte, Chiara ha scartato alcune carte, assicurandosi che nel mazzo residuo restassero tutti e quattro gli assi. Ora estrae quattro carte a caso da questo mazzo ridotto. Se la probabilità di estrarre esattamente i quattro assi è 1/1001, quante carte ha buttato via?

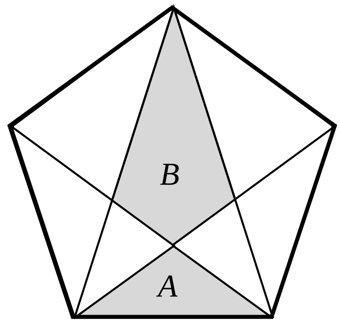
Risposta: 38.

Soluzione. Se le carte residue sono n, la probabilità di estrarre esattamente i quattro assi è

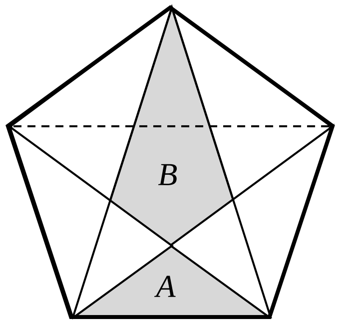
$$p = \frac{4}{n} \times \frac{3}{n-1} \times \frac{2}{n-2} \times \frac{1}{n-3}.$$

p = 1/1001 equivale a $n(n-1)(n-2)(n-3) = 24024$. Non potendo chiaramente essere $n < 10$, né n compreso tra 10 e 13 (inclusi), poiché uno dei quattro fattori sarebbe 10, deve essere $n \geq 14$. Si verifica subito che deve essere proprio $n = 14$.

C6. (*22 punti*) In figura vedi un pentagono regolare di cui sono state tracciate quattro diagonali che individuano due regioni ombreggiate *A* e *B*. Esprimi l'area di *B* in dipendenza dall'area di *A*.

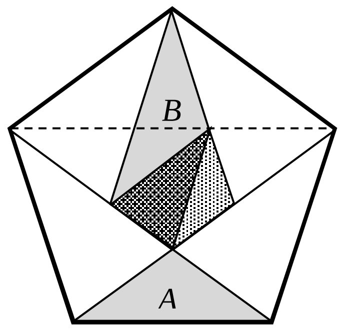


Risposta: l'area di *B* è il doppio di quella di *A*.



Soluzione. Sia *a* l'area di *A*. Tracciando la diagonale mancante del pentagono, il pentagono risulta suddiviso in un pentagono centrale di area *p*, in 5 triangoli fra loro congruenti di area *a* un lato dei quali è un lato del pentagono originale e 5 altri triangoli fra loro congruenti di area *b* un lato dei quali è un lato del pentagono centrale. Osservando, ad esempio, uno dei parallelogrammi formati da due lati (consecutivi) del pentagono originale e parte di due delle diagonali, si ricava immediatamente $2a + b = p + 2b$, cioè $p = 2a - b$, da cui segue che l'area di *B* è il doppio dell'area di *A*.

Soluzione alternativa. In ogni pentagono regolare i tre angoli acuti determinati da lati e/o diagonali uscenti da uno stesso vertice tra loro consecutivi sono congruenti (insistono su corde e quindi archi congruenti nel cerchio circoscritto) e quindi misurano 36°, il che comporta che l'angolo tra lato e diagonale non immediatamente consecutiva uscenti da uno stesso vertice sia di 72° e di conseguenza (con riferimento alla figura a lato) che i 4 triangoli bianchi siano isosceli. Ora, tracciando la diagonale mancante nella figura originale, il quadrilatero *B* si può scomporre in tre triangoli di cui



- uno congruente al triangolo che nel quadrilatero *B* sta al di sopra della diagonale tratteggiata (entrambi isosceli con basi congruenti e angoli al vertice congruenti, dato che le cinque diagonali individuano un pentagono regolare all'interno di quello dato),
- un altro congruente al triangolo che nel quadrilatero *B* sta subito al di sotto della diagonale tratteggiata,
- un terzo congruente al triangolo *A* (entrambi isosceli con basi congruenti e angoli alla base congruenti).

Quindi *B* risulta scomposto in figure equivalenti a due triangoli *A*.