# Kangourou della Matematica 2017
## finale nazionale italiana
## Cervia, 30 settembre 2017

## *LIVELLO STUDENT*

Tutte le risposte devono essere giustificate

**S1.** (*5 punti* ) Scrivi un numero intero positivo di due cifre distinte fra loro, scrivi il numero che ottieni invertendo le cifre (questo secondo numero può eventualmente essere di una sola cifra, se la cifra delle unità del primo è 0) e sottrai il più piccolo dal più grande di questi due numeri. Ripeti la procedura sul risultato che ottieni fino a quando non ottieni come risultato un numero di una sola cifra. Questo numero di una sola cifra dipende dal numero che hai scelto inizialmente? Giustifica la tua risposta.

**S2.** (*7 punti* ) Esistono sequenze di (almeno due) numeri interi positivi consecutivi tali che la somma delle cifre di ciascun numero della sequenza sia divisibile per 7? In caso affermativo, quanti numeri vi possono essere al massimo in una di queste sequenze?

**S3.** (*11 punti* ) Sia $S$ un insieme finito arbitrario di punti del piano (almeno 2): è noto che esiste, ed è unico, il cerchio $C$ di raggio minimo che contiene $S$ (la dimostrazione di questo fatto esula dal contesto di questa gara, dunque non è richiesta). Una coppia $\{a, b\}$ di punti di $S$ si dice *diametrale* se, comunque scelti due punti di $S$, la loro distanza non supera la distanza fra $a$ e $b$. Stabilire se è vero (motivando la risposta) che:
- ogni coppia diametrale di $S$ deve necessariamente stare sulla circonferenza che delimita $C$;
- esistono sempre cerchi che contengono $S$, ma non contengono $C$.

**S4.** (*14 punti* ) Quanti diversi cubi sono inscrivibili in (cioè hanno i vertici in comune con i vertici di) un dodecaedro regolare?

**S5.** (*18 punti* ) Un rettangolo $9 \times 7$ è suddiviso in 63 quadrati di lato 1, ottenendo un reticolo. Immagina di piantare uno spillo in ciascuno dei vertici dei quadrati (un solo spillo in ogni vertice comune a più quadrati) e di voler passare un filo tendendolo tra uno spillo e l'altro, in modo da percorrere almeno una volta tutti e soli i lati dei quadrati (dunque non le diagonali) , senza rompere il filo. Qual è la minima lunghezza sufficiente per il filo? (Trascura il fatto che occorre girare attorno ad alcuni spilli, cioè assumi che lo spessore degli spilli sia 0).

**S6.** (*22 punti* ) Esiste una funzione $f$ dall'intervallo $[0,1]$ in sé tale che l'immagine tramite $f$ di ogni intervallo contenuto in $[0,1]$ sia tutto $[0,1]$? Se la tua risposta è negativa chiarisci il motivo, se è affermativa indica come può esserne ottenuto un esempio.

## *LIVELLO STUDENT*

## SOLUZIONI

**S1.** (*5 punti* ) Scrivi un numero intero positivo di due cifre distinte fra loro, scrivi il numero che ottieni invertendo le cifre (questo secondo numero può eventualmente essere di una sola cifra, se la cifra delle unità del primo è 0) e sottrai il più piccolo dal più grande di questi due numeri. Ripeti la procedura sul risultato che ottieni fino a quando non ottieni come risultato un numero di una sola cifra. Questo numero di una sola cifra dipende dal numero che hai scelto inizialmente? Giustifica la tua risposta.

**Risposta: No, il numero finale è comunque 9**
**Soluzione.** Sia $10a + b$ il numero di partenza: dato che ha cifre diverse possiamo supporre $a > b$. Applicando l'operazione descritta si ottiene il numero $10(a - b) + b - a = 10(a - b - 1) + 10 + b - a$ che ha ancora cifre diverse, avendo diversa parità. Iterando la costruzione a ogni passo, e in particolare all'ultimo, si ottiene un numero della forma $9(a' - b')$, ove $a'$ e $b'$ sono le cifre del penultimo numero; ma ora questo numero ha una sola cifra che deve essere multipla di 9 ma diversa da 0, dato che $a'$ e $b'$ sono diversi. Quindi tale cifra è 9.

**S2.** (*7 punti* ) Esistono sequenze di (almeno due) numeri interi positivi consecutivi tali che la somma delle cifre di ciascun numero della sequenza sia divisibile per 7? In caso affermativo, quanti numeri vi possono essere al massimo in una di queste sequenze?

**Risposta: Sì, ad es. 69999 e 69999 + 1. Non più di due.**
**Soluzione.** È chiaro che esistono infinite coppie di questo tipo. Non esistono più di due numeri consecutivi con la proprietà richiesta. Infatti due numeri consecutivi hanno come somma delle cifre due numeri consecutivi, tranne nel caso in cui il più piccolo dei due ha come cifra delle unità 9: dato che due numeri consecutivi non possono essere entrambi divisibili per 7, realizzano la condizione solo sequenze di due numeri opportuni il più piccolo dei quali ha 9 come cifra delle unità.

**S3.** (*11 punti* ) Sia $S$ un insieme finito arbitrario di punti del piano (almeno 2): è noto che esiste, ed è unico, il cerchio $C$ di raggio minimo che contiene $S$ (la dimostrazione di questo fatto esula dal contesto di questa gara, dunque non è richiesta). Una coppia $\{a, b\}$ di punti di $S$ si dice *diametrale* se, comunque scelti due punti di $S$, la loro distanza non supera la distanza fra $a$ e $b$. Stabilire se è vero (motivando la risposta) che:
- ogni coppia diametrale di $S$ deve necessariamente stare sulla circonferenza che delimita $C$;
- esistono sempre cerchi che contengono $S$, ma non contengono $C$.

**Risposta: No. Sì.**
**Soluzione.** Contro-esempio per la prima domanda. In un triangolo equilatero il diametro del cerchio circoscritto vale 4/3 dell'altezza $h$, dunque più della lunghezza $l$ del lato

($2h = l\sqrt{3}$). Basta allora assumere come $S$ l'insieme di 4 punti costituito dai tre vertici di un triangolo equilatero e da un punto esterno al triangolo, sul prolungamento dell'altezza condotta da un vertice $V$, che abbia una distanza da $V$ maggiore di $l$ ma minore di $(4/3)\,h$.
Seconda domanda. Sulla circonferenza $\Upsilon$ che delimita $C$ devono comunque esserci almeno due punti di $S$ (in caso contrario, essendo $S$ un insieme finito, è facile verificare che sarebbe possibile trovare un cerchio di raggio inferiore contenente $S$). Siano $A$ e $B$ due punti di $S$ su $\Upsilon$ tali che non vi sia alcun punto di $S$ su uno dei due archi di $\Upsilon$ di cui sono gli estremi: almeno uno dei due semipiani delimitati dalla retta per $A$ e $B$ ospita (eventualmente) solo punti di $S$ interni a $C$ (in numero finito). È allora evidente che esiste qualche circonferenza per $A$ e per $B$ di raggio maggiore del raggio di $C$, con centro sull'asse del segmento $AB$ nel semipiano opposto a quello di cui sopra, che contiene $S$ ma non contiene $C$.

**S4.** (*14 punti* ) Quanti diversi cubi sono inscrivibili in (cioè hanno i vertici in comune con i vertici di) un dodecaedro regolare?

**Risposta: 5.**
**Soluzione.** Le facce di un dodecaedro regolare sono pentagoni regolari. Poiché i vertici di un cubo sono 8 e ognuno appartiene a 3 diversi pentagoni, per motivi di simmetria ogni faccia deve ospitare esattamente 2 vertici del cubo: per ragioni metriche, essi devono essere vertici di una diagonale della faccia. Sempre per motivi di simmetria, ogni diagonale di ogni faccia può essere uno spigolo ma, fissata una diagonale di una faccia, il cubo è univocamente determinato. Ogni faccia ha 5 diagonali e quindi i cubi sono 5.

**S5.** (*18 punti* ) Un rettangolo $9 \times 7$ è suddiviso in 63 quadrati di lato 1, ottenendo un reticolo. Immagina di piantare uno spillo in ciascuno dei vertici dei quadrati (un solo spillo in ogni vertice comune a più quadrati) e di voler passare un filo tendendolo tra uno spillo e l'altro, in modo da percorrere almeno una volta tutti e soli i lati dei quadrati (dunque non le diagonali), senza rompere il filo. Qual è la minima lunghezza sufficiente per il filo? (Trascura il fatto che occorre girare attorno ad alcuni spilli, cioè assumi che lo spessore degli spilli sia 0).

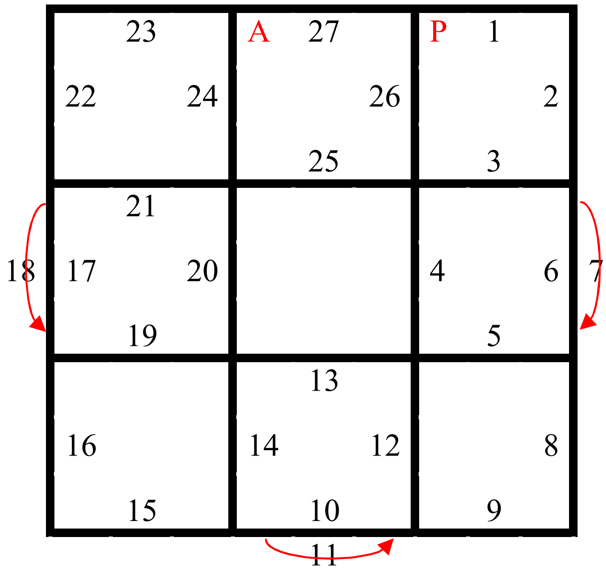
**Risposta: $2 \times 9 \times 7 + 2 \times 9 + 2 \times 7 - 3 = 155$.**
**Soluzione** valida per qualunque coppia $\{m, n\}$ di lunghezze intere dispari dei lati ($m$, $n > 1$). Siano $E$ il generico lato di un quadrato e $V$ il generico vertice. Indichiamo con $p_E$ il numero di volte che il filo passa per il lato $E$. Per ipotesi so che $p_E \geq 1$ (perché passa per ogni lato) e inoltre so che per ogni vertice $V$, diverso da quello di partenza e da quello di arrivo, la somma dei $p_E$ al variare dei lati $E$ che fanno capo a $V$ è un intero pari (quando entro in un vertice devo anche uscirne). Considero ora i vertici sul perimetro che non sono vertici del rettangolo: ognuno di essi ha esattamente 3 lati uscenti (chiamiamo questi vertici *dispari*) quindi, se non sono in un vertice $V$ di partenza o di arrivo, la somma dei $p_EV$ al variare dei lati $E$ che fanno capo a $V$ deve essere almeno 4, per cui deve esistere un lato $E$ a cui $V$ appartiene tale che $p_E \geq 2$. Ognuno di tali lati è collegato al più a 2 vertici dispari, quindi il numero di tali lati è almeno la metà del numero dei vertici dispari, non contando quelli di arrivo e di partenza. Poiché $m$ e $n$ sono dispari, il numero di vertici dispari da considerare è pari per ogni lato e quindi li posso

accoppiare considerando come percorsi (almeno) due volte i lati alternati giacenti sul perimetro; in questo caso ho

$$2 \times [(m - 1)/2 + (n - 1)/2] - 1$$

lati percorsi due volte da collocare, perché una coppia posso lasciarla libera (lato di partenza e lato di arrivo). Complessivamente, considerando ogni lato con la sua molteplicità di percorrenza, i lati da percorrere sono allora almeno $2 \times m \times n + 2 \times m + 2 \times n - 3$.

In effetti tale numero è sufficiente. Per semplificare la simbologia della giustificazione, basta ovviamente considerare un caso particolare in quanto indicativo di come si può procedere in generale, ad esempio $m = n = 3$. Un percorso possibile è suggerito dalla sequenza numerica. Quando ci sono due numeri, significa che si deve percorrere il lato una volta nella direzione di provenienza e poi nel verso opposto (ad es. nel caso (6,7) prima verso l'alto e poi verso il basso).




**S6.** (*22 punti* ) Esiste una funzione $f$ dall'intervallo [0,1] in sé tale che l'immagine tramite $f$ di ogni intervallo contenuto in [0,1] sia tutto [0,1]? Se la tua risposta è negativa chiarisci il motivo, se è affermativa indica come può esserne ottenuto un esempio.

**Risposta: Sì.**

**Soluzione.** Esempio.

Dichiariamo equivalenti due numeri in [0,1] se la loro differenza è razionale e ripartiamo [0,1] in classi, ognuna delle quali contiene tutti e soli i numeri equivalenti ad uno qualunque dei suoi elementi. Esistono numeri razionali (positivi) piccoli quanto si vuole, dunque ogni intervallo contiene almeno un elemento per ogni classe (di fatto infiniti). Le classi sono a due a due disgiunte e il loro insieme $S$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con [0,1] in quanto ogni classe possiede una quantità numerabile di elementi. Sia $h$ la funzione che ad ogni numero di [0,1] associa la classe cui appartiene e sia $\psi$ una qualunque funzione iniettiva e suriettiva da $S$ su [0,1]. La composizione $\psi \circ h$ ha la proprietà richiesta.

Idea per una possibile costruzione alternativa.

Si considerino i numeri di [0,1], dominio di $f$, in rappresentazione ternaria con cifre 0, 1, 2 e quelli di [0,1] in rappresentazione binaria con cifre 0, 2. Sia $x$ in [0,1]: se nella rappresentazione ternaria di $x$ la cifra 1 compare infinite volte, si definisca $f(x) = 0$. In caso contrario, si definisca $f(x)$ il numero di [0,1] corrispondente in rappresentazione binaria alla sequenza di cifre 0 e 2 che segue l'ultima cifra 1 di $x$. Sia $I$ un sub-intervallo di [0,1] e sia $y$ il suo punto medio: è chiaro che, troncando la rappresentazione ternaria di $y$ al posto $n$, se $n$ è sufficientemente grande la prosecuzione della rappresentazione troncata con 1 e quindi con tutte le possibili sequenze di soli 0 e 2 (non di periodo 2) fornisce la rappresentazione ternaria di un numero che sta ancora in $I$. A questo numero si applicherà quanto detto sopra.