LIVELLO JUNIOR

Tutte le risposte devono essere giustificate

J1. (*5 punti*) Un amico ti invita a giocare a dadi nel modo seguente. Tu e lui lanciate più volte due dadi identici non truccati, con le facce numerate, come al solito, da 1 a 6 e calcolate la somma dei punti ottenuti. Se la somma è 9 vince uno di voi due, se la somma è 10 vince l'altro, se la somma è diversa da 9 e da 10 non vince nessuno dei due. Ti lascia scegliere, fra 9 e 10, la somma che ti fa vincere, tenendo per sé quella delle due che non hai scelto. Quale ti conviene scegliere e perché?

J2. (*7 punti*) Esistono terne di numeri dispari consecutivi, ciascuno dei quali sia primo? In caso di risposta affermativa, precisa quante sono; in caso di risposta negativa, fornisci una motivazione.

J3. (*11 punti*) Un aereo di linea vola giornalmente da un aeroporto *A* ad un aeroporto *B* e ritorna da *B* ad *A* lungo la stessa rotta rettilinea, sempre tenendo i motori al massimo possibile della potenza. Ieri c'era totale assenza di vento, oggi invece per tutta la giornata ha spirato un vento a velocità costante da *A* verso *B*. Nel complesso dei due voli, oggi ha impiegato lo stesso tempo di ieri? Un tempo minore? Un tempo maggiore? Giustifica la tua risposta come ritieni più opportuno.

J4. (*14 punti*) Esistono sequenze di (almeno due) numeri interi positivi consecutivi tali che la somma delle cifre di ciascun numero della sequenza sia divisibile per 7? In caso affermativo, quanti numeri vi possono essere al massimo in una di queste sequenze?

J5. (*18 punti*) Sia *S* un insieme finito arbitrario di punti del piano (almeno 2): è noto che esiste, ed è unico, il cerchio *C* di raggio minimo che contiene *S* (la dimostrazione di questo fatto esula dal contesto di questa gara, dunque non è richiesta). Una coppia {*a*, *b*} di punti di *S* si dice *diametrale* se, comunque scelti due punti di *S*, la loro distanza non supera la distanza fra *a* e *b*. Stabilire se è vero (motivando la risposta) che:
- ogni coppia diametrale di *S* deve necessariamente stare sulla circonferenza che delimita *C*;
- esistono sempre cerchi che contengono *S*, ma non contengono *C*.

J6. (*22 punti*) Quanti diversi cubi sono inscrivibili in (cioè hanno i vertici in comune con i vertici di) un dodecaedro regolare? (Si ricordi che le facce di un dodecaedro regolare sono pentagoni regolari.)

Kangourou della Matematica 2017
finale nazionale italiana
Cervia, 30 settembre 2017

LIVELLO JUNIOR

SOLUZIONI

J1. (*5 punti*) Un amico ti invita a giocare a dadi nel modo seguente. Tu e lui lanciate più volte due dadi identici non truccati, con le facce numerate, come al solito, da 1 a 6 e calcolate la somma dei punti ottenuti. Se la somma è 9 vince uno di voi due, se la somma è 10 vince l'altro, se la somma è diversa da 9 e da 10 non vince nessuno dei due. Ti lascia scegliere, fra 9 e 10, la somma che ti fa vincere, tenendo per sé quella delle due che non hai scelto. Quale ti conviene scegliere e perché?

Risposta: 9.
Soluzione. Chiamiamo *A* un dado e *B* l'altro. Una coppia (non ordinata, l'ordine degli addendi è inessenziale per la somma) di numeri *x* e *y* diversi è ottenibile sia quando *A* fornisce *x* e *B* fornisce *y*, sia quando accade l'inverso: allora una tale coppia $\{x, y\}$ ha probabilità doppia di presentarsi rispetto ad una coppia $\{x, x\}$ (ottenibile solo quando sia *A* sia *B* forniscono *x*). 9 è realizzabile solo come 6 + 3 o 5 + 4, 10 è realizzabile solo come 6 + 4 o 5 + 5.

J2. (*7 punti*) Esistono terne di numeri dispari consecutivi, ciascuno dei quali sia primo? In caso di risposta affermativa, precisa quante sono; in caso di risposta negativa, fornisci una motivazione.

Risposta: Sì, una sola, {3, 5, 7}.
Soluzione. Siano *a*, *b*, *c* tre numeri dispari consecutivi. Se né *a* né *b* sono divisibili per 3, deve esserlo $a + 1$ e quindi $a + 4 = c$ non è primo.

J3. (*11 punti*) Un aereo di linea vola giornalmente da un aeroporto *A* ad un aeroporto *B* e ritorna da *B* ad *A* lungo la stessa rotta rettilinea, sempre tenendo i motori al massimo possibile della potenza. Ieri c'era totale assenza di vento, oggi invece per tutta la giornata ha spirato un vento a velocità costante da *A* verso *B*. Nel complesso dei due voli, oggi ha impiegato lo stesso tempo di ieri? Un tempo minore? Un tempo maggiore? Giustifica la tua risposta come ritieni più opportuno.

Risposta: un tempo maggiore.
Soluzione. L'incremento di velocità (dovuto al vento) nel tragitto di andata è quantitativamente uguale al decremento subito nel tragitto di ritorno, ma la velocità inferiore è stata tenuta per un tempo maggiore a quello per cui è stata tenuta quella superiore.

J4. (*14 punti*) Esistono sequenze di (almeno due) numeri interi positivi consecutivi tali che la somma delle cifre di ciascun numero della sequenza sia divisibile per 7? In caso affermativo, quanti numeri vi possono essere al massimo in una di queste sequenze?

Risposta: Sì, ad es. 69999 e 69999 + 1. Non più di due.
Soluzione. È chiaro che esistono infinite coppie di questo tipo. Non esistono più di due numeri consecutivi con la proprietà richiesta. Infatti due numeri consecutivi hanno come somma delle cifre due numeri consecutivi, tranne nel caso in cui il più piccolo dei due ha come cifra delle unità 9: dato che due numeri consecutivi non possono essere entrambi divisibili per 7, realizzano la condizione solo sequenze di due numeri opportuni il più piccolo dei quali ha 9 come cifra delle unità.

J5. (*18 punti*) Sia S un insieme finito arbitrario di punti del piano (almeno 2): è noto che esiste, ed è unico, il cerchio C di raggio minimo che contiene S (la dimostrazione di questo fatto esula dal contesto di questa gara, dunque non è richiesta). Una coppia $\{a, b\}$ di punti di S si dice *diametrale* se, comunque scelti due punti di S, la loro distanza non supera la distanza fra a e b. Stabilire se è vero (motivando la risposta) che:
- ogni coppia diametrale di S deve necessariamente stare sulla circonferenza che delimita C;
- esistono sempre cerchi che contengono S, ma non contengono C.

Risposta: No. Sì.
Soluzione. Contro-esempio per la prima domanda. In un triangolo equilatero il diametro del cerchio circoscritto vale 4/3 dell'altezza h, dunque più della lunghezza l del lato ($2h = l\sqrt{3}$). Basta allora assumere come S l'insieme di 4 punti costituito dai tre vertici di un triangolo equilatero e da un punto esterno al triangolo, sul prolungamento dell'altezza condotta da un vertice V, che abbia una distanza da V maggiore di l ma minore di $(4/3)\,h$.
Seconda domanda. Sulla circonferenza Υ che delimita C devono comunque esserci almeno due punti di S (in caso contrario, essendo S un insieme finito, è facile verificare che sarebbe possibile trovare un cerchio di raggio inferiore contenente S). Siano A e B due punti di S su Υ tali che non vi sia alcun punto di S su uno dei due archi di Υ di cui sono gli estremi: almeno uno dei due semipiani delimitati dalla retta per A e B ospita (eventualmente) solo punti di S interni a C (in numero finito). È allora evidente che esiste qualche circonferenza per A e per B di raggio maggiore del raggio di C, con centro sull'asse del segmento AB nel semipiano opposto a quello di cui sopra, che contiene S ma non contiene C.

J6. (*22 punti*) Quanti diversi cubi sono inscrivibili in (cioè hanno i vertici in comune con i vertici di) un dodecaedro regolare? (Si ricordi che le facce di un dodecaedro regolare sono pentagoni regolari.)
Risposta: 5.
Soluzione. Le facce di un dodecaedro regolare sono pentagoni regolari. Poiché i vertici di un cubo sono 8 e ognuno appartiene a 3 diversi pentagoni, per motivi di simmetria ogni faccia deve ospitare esattamente 2 vertici del cubo: per ragioni metriche, essi devono essere vertici di una diagonale della faccia. Sempre per motivi di simmetria, ogni diagonale di ogni faccia può essere uno spigolo ma, fissata una diagonale di una faccia, il cubo è univocamente determinato. Ogni faccia ha 5 diagonali e quindi i cubi sono 5.