



Kangourou della Matematica 2016
Coppa a squadre Kangourou
Semifinale turno A
Cervia, 7 maggio 2016



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

Quesiti

1. I biglietti di Giacomo

Ci sono 200 biglietti numerati da 1 a 200. Giacomo vuole accoppiare quanti più possibile di questi biglietti in modo che, per ogni coppia di biglietti che forma, la somma dei numeri riportati sui biglietti sia 100. Quante coppie diverse può formare? Attenzione: le coppie non vanno considerate ordinate, ad esempio le coppie $\{1,99\}$ e $\{99,1\}$ vanno considerate come un'unica coppia.

2. Scuola e sport

In inverno, dei 300 alunni di una scuola, 180 giocano a calcio e gli altri 120 sciano. In estate tutti gli alunni o giocano a tennis o nuotano, ma nessuno fa entrambi gli sport. Il 56% di coloro che in estate giocano a tennis, in inverno gioca a calcio; il 30% di coloro che in inverno giocano a calcio, in estate nuota. Quanti sono gli alunni che sciano e nuotano?

3. Il numero centrale

La somma di 9 numeri interi consecutivi è 3^{1000} ; il numero centrale è 9^x . Quanto vale x ?

4. Esattamente 6

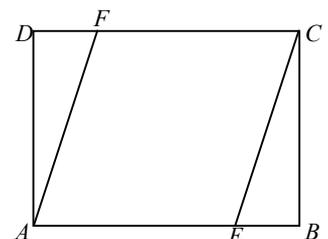
Il numero intero positivo N ha esattamente 6 divisori distinti fra loro, 1 e N compresi. Il prodotto di 5 di questi è 5000. Qual è il divisore non presente fra questi 5?

5. Cubotti

Una ditta produce solo cubi di polistirolo i cui lati misurino un numero intero di centimetri, a scelta (purché ragionevole) del committente. Dovete riempire esattamente una cassa a forma di parallelepipedo rettangolo, le cui dimensioni in centimetri sono $160 \times 140 \times 100$, con cubi di polistirolo, tutti uguali fra loro. Se volete ordinare il minor numero possibile di cubi, quanti ne dovete ordinare?

6. Il rombo

Osservate la figura. I lati AB e AD del rettangolo $ABCD$ sono lunghi rispettivamente 48 e 36 cm, $AECF$ è un rombo. Quanti centimetri misura la sua diagonale EF ?



7. Le due candele

Due candele hanno la stessa lunghezza e, una volta accese, il consumo di ciascuna è direttamente proporzionale al tempo. Una delle due candele si estingue in 10 ore, l'altra in 8 ore. Se vengono accese contemporaneamente, dopo quanti minuti la lunghezza della prima sarà il doppio della lunghezza della seconda?

8. La corona circolare

Avete una corona circolare i cui raggi esterno ed interno misurano rispettivamente 12 e 2 cm. Volete suddividerla in corone circolari ognuna di area uguale a quella del cerchio interno che è stato soppresso per formare la corona iniziale. Quante circonferenze dovete tracciare?

9. Il treno

È mezzogiorno preciso. Da questo istante, per mezz'ora, un treno viaggerà a 195 km/h; poi, sempre per mezz'ora, viaggerà a 190 km/h e così via, diminuendo la sua velocità di 5 km/h ogni mezz'ora fino a quando si fermerà. Quanti chilometri avrà percorso da mezzogiorno fino a quando si fermerà?

10. Un braccialetto per Carla

Carla ha 7 anellini di colori tutti diversi fra loro. Collocandoli uno dopo l'altro e collegandoli, vuole costruire un braccialetto. Quanti diversi braccialetti può formare?

11. La velocità media

Un treno ha compiuto metà di un tragitto alla velocità media di 50 km/h. Quale è stata la sua velocità media (in km/h) nella restante parte del tragitto, se la velocità media sull'intero tragitto è risultata di 75 km/h?

12. La divisione

Un numero intero positivo N diviso per 23 dà resto 16. Qual è il resto di N^2 diviso per 23?

13. La media

La media aritmetica di 20 numeri interi positivi tutti diversi fra loro è 101. Quanto può valere al massimo il più grande di questi 20 numeri?

14. La griglia

Si vogliono inserire i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 nelle celle ancora vuote della griglia in figura in modo che si ottenga sempre lo stesso numero sia che si sommino i numeri in una colonna, sia che si sommino quelli in una riga. Quanto vale la somma dei numeri nelle celle ombreggiate?

		7

15. Simboli

Ho la sequenza $1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5$. Inserisco nella sequenza una parentesi sinistra "(" e una destra ")" e sostituisco due dei simboli \square con il simbolo "+" e due con il simbolo "-" in modo che il risultato dell'espressione algebrica che ne risulta sia il massimo possibile. Qual è questo risultato?



Kangourou della Matematica 2016
Coppa a squadre Kangourou
Semifinale turno A
Cervia, 7 maggio 2016



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI
DI MILANO

Quesiti e soluzioni

1. I biglietti di Giacomo

Ci sono 200 biglietti numerati da 1 a 200. Giacomo vuole accoppiare quanti più possibile di questi biglietti in modo che, per ogni coppia di biglietti che forma, la somma dei numeri riportati sui biglietti sia 100. Quante coppie diverse può formare? Attenzione: le coppie non vanno considerate ordinate, ad esempio le coppie $\{1,99\}$ e $\{99,1\}$ vanno considerate come un'unica coppia.

[0049] La somma 100 si può ottenere in 49 modi diversi: $1 + 99 = \dots = 49 + 51$.

2. Scuola e sport

In inverno, dei 300 alunni di una scuola, 180 giocano a calcio e gli altri 120 sciano. In estate tutti gli alunni o giocano a tennis o nuotano, ma nessuno fa entrambi gli sport. Il 56% di coloro che in estate giocano a tennis, in inverno gioca a calcio; il 30% di coloro che in inverno giocano a calcio, in estate nuota. Quanti sono gli alunni che sciano e nuotano?

[0021] Nuotano e giocano a calcio $30 \times 180/100 = 54$ alunni e quindi giocano a tennis e a calcio $180 - 54 = 126$ alunni. Questi sono il 56% del totale che gioca a tennis, che è quindi di $12600/56 = 1800/8 = 225$ alunni.

Quindi il numero totale dei nuotatori è $300 - 225 = 75$ e i nuotatori che sciano sono $75 - 54 = 21$.

	Calcio	Sci	estate
Tennis	$126 = 70\% \times 180 = 56\% \times 225$	$99 = 44\% \times 225$	225
Nuoto	$54 = 30\% \times 180$	21	75
<i>inverno</i>	180	120	300

3. Il numero centrale

La somma di 9 numeri interi consecutivi è 3^{1000} ; il numero centrale è 9^x . Quanto vale x ?

[0499] $9 \times 9^x = 9^{500}$, cioè $1 + x = 500$.

4. Esattamente 6

Il numero intero positivo N ha esattamente 6 divisori distinti fra loro, 1 e N compresi. Il prodotto di 5 di questi è 5000. Qual è il divisore non presente fra questi 5?

[0025] Possiamo raccogliere i divisori a coppie (d_1, d_2) in modo che $d_1 d_2 = N$. Quindi se i divisori sono 6 il loro prodotto è N^3 . Ora $5000 = 8 \times 5^4 = 2^3 \times 25^2$ e quindi per avere un cubo perfetto (che non sia prodotto di più di 6 divisori) bisogna moltiplicare 5000 per 25 (in effetti i divisori di $N = 50$ sono 1, 50, 2, 25, 5, 10).

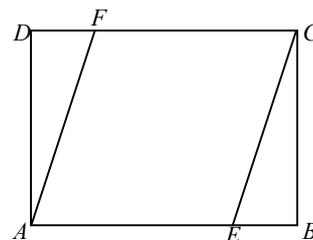
5. Cubotti

Una ditta produce solo cubi di polistirolo i cui lati misurino un numero intero di centimetri, a scelta (purché ragionevole) del committente. Dovete riempire esattamente una cassa a forma di parallelepipedo rettangolo, le cui dimensioni in centimetri sono $160 \times 140 \times 100$, con cubi di polistirolo, tutti uguali fra loro. Se volete ordinare il minor numero possibile di cubi, quanti ne dovete ordinare?

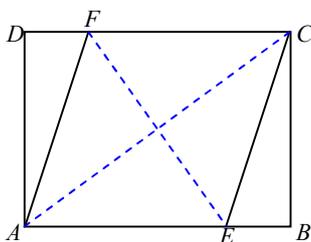
[0280] Basta trovare il MCD delle dimensioni dello scatolone: $\text{MCD}\{160,140,100\} = 20$: il numero di cubotti è quindi $8 \times 7 \times 5 = 280$.

6. Il rombo

Osservate la figura. I lati AB e AD del rettangolo $ABCD$ sono lunghi rispettivamente 48 e 36 cm, $AECF$ è un rombo. Quanti centimetri misura la sua diagonale EF ?



[0045] Indichiamo con XY oltre al segmento di estremi X e Y anche la sua lunghezza. Osserviamo che $AB = 12 \times 4$ cm, $AD = 12 \times 3$ cm, quindi le diagonali del rettangolo misurano 12×5 cm (terna pitagorica). AC è anche una delle due diagonali del rombo $AECF$ le quali, intersecandosi, individuano nel rombo quattro triangoli rettangoli simili a ABC (ad es. quello che ha ipotenusa AE condivide con ABC l'angolo CAB). Quindi $EF : AC = BC : AB$, cioè $EF = (12 \times 5) (12 \times 3) / (12 \times 4) = 12 \times 5 \times 3/4 = 45$ cm.



7. Le due candele

Due candele hanno la stessa lunghezza e, una volta accese, il consumo di ciascuna è direttamente proporzionale al tempo. Una delle due candele si estingue in 10 ore, l'altra in 8 ore. Se vengono accese contemporaneamente, dopo quanti minuti la lunghezza della prima sarà il doppio della lunghezza della seconda?

[0400] Dopo n minuti, la prima candela si sarà consumata per $n/600$ della lunghezza, la seconda per $n/480$. Si ha $1 - n/600 = 2(1 - n/480)$ solo per $n = 400$.

8. La corona circolare

Avete una corona circolare i cui raggi esterno ed interno misurano rispettivamente 12 e 2 cm. Volete suddividerla in corone circolari ognuna di area uguale a quella del cerchio interno che è stato soppresso per formare la corona iniziale. Quante circonferenze dovete tracciare?

[0034] L'area del cerchio interno è 4π cm²; quella del cerchio esterno è 144π cm²: il numero di corone circolari deve quindi essere $144\pi/4\pi - 1 = 35$; la circonferenza più esterna e quella più interna sono già tracciate e quindi ne servono altre 34 per delimitare le 35 corone circolari.

9. Il treno

È mezzogiorno preciso. Da questo istante, per mezz'ora, un treno viaggerà a 195 km/h; poi, sempre per mezz'ora, viaggerà a 190 km/h e così via, diminuendo la sua velocità di 5 km/h ogni mezz'ora fino a quando si fermerà. Quanti chilometri avrà percorso da mezzogiorno fino a quando si fermerà?

[1950] Nella prima mezz'ora il treno percorrerà 97,5 km, nella seconda 95 e così via scalando ogni mezz'ora di 2,5 km; nell'ultima mezz'ora percorrerà 2,5 km. In totale quindi percorrerà $2,5 \times (39 + 38 + \dots + 1) = 2,5 \times 40 \times 39/2 = 1950$ km.

10. Un braccialetto per Carla

Carla ha 7 anellini di colori tutti diversi fra loro. Collocandoli uno dopo l'altro e collegandoli, vuole costruire un braccialetto. Quanti diversi braccialetti può formare?

[0360] Partendo da un colore qualunque fissato, Carla ha $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720$ modi di aggiungere i restanti anellini; però quando chiude il braccialetto è indifferente che una certa sequenza sia in verso orario o antiorario e quindi il numero di "braccialetti" possibili è $720/2$.

11. La velocità media

Un treno ha compiuto metà di un tragitto alla velocità media di 50 km/h. Quale è stata la sua velocità media (in km/h) nella restante parte del tragitto, se la velocità media sull'intero tragitto è risultata di 75 km/h?

[0150]. La lunghezza del tragitto è chiaramente ininfluente. Assumiamo per comodità che sia 100 km, e quindi che metà tragitto sia 50 km. A 75 km/h di media, per percorrere 100 km occorrono 1 ora e 20 minuti. Il treno deve quindi percorrere i rimanenti 50 km in 20 minuti.

12. La divisione

Un numero intero positivo N diviso per 23 dà resto 16. Qual è il resto di N^2 diviso per 23?

[0003]. Se $N = 23K + 16$, N^2 è somma di due multipli di 23 e di 16^2 . Il resto della divisione di N^2 per 23 coincide dunque con il resto della divisione di 16^2 per 23.

13. La media

La media aritmetica di 20 numeri interi positivi tutti diversi fra loro è 101. Quanto può valere al massimo il più grande di questi 20 numeri?

[1830] La somma dei 20 numeri è $101 \times 20 = 2020$; il più grande è massimo se gli altri sono i primi 19 numeri interi positivi, la cui somma è $19 \times 10 = 190$; quindi il restante numero è $2020 - 190$.

14. La griglia

Si vogliono inserire i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 nelle celle ancora vuote della griglia in figura in modo che si ottenga sempre lo stesso numero sia che si sommino i numeri in una colonna, sia che si sommino quelli in una riga. Quanto vale la somma dei numeri nelle celle ombreggiate?

		7

[0022] La somma dei numeri nelle celle è $1 + 2 + \dots + 9 = 45$. Se ogni riga deve avere la stessa somma, la somma dei numeri in ogni riga deve essere $45/3=15$; la stessa cosa vale per ogni colonna. Si vede allora che la somma dei numeri nelle due prime colonne deve essere 30, la somma dei numeri nelle celle ancora libere della seconda riga deve essere 8 e quindi la somma dei numeri nelle celle ombreggiate deve essere $30 - 8 = 22$. La situazione è realizzata dalla tabella a lato.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

15. Simboli

Ho la sequenza $1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5$. Inserisco nella sequenza una parentesi sinistra “(” e una destra “)” e sostituisco due dei simboli \square con il simbolo “+” e due con il simbolo “-” in modo che il risultato dell’espressione algebrica che ne risulta sia il massimo possibile. Qual è questo risultato?

[0011] Il valore massimo si ottiene lasciando il segno “+” ai numeri più grandi e inserendo due segni “-” consecutivi con le parentesi dopo il primo e dopo il numero che segue il secondo:

$$1 - (2 - 3) + 4 + 5 = 11.$$