LIVELLO STUDENT

Tutte le risposte devono essere giustificate

S1. (*5 punti*) Per un certo valore di *n*, 2016 è esprimibile come la radice quadrata della somma dei cubi dei primi *n* interi positivi. Quanto vale *n*? Spiega come l'hai determinato.

S2. (*7 punti*) Nella strana repubblica di Kang gli anni durano 3000 giorni, numerati da 1 a 3000. I giorni festivi sono quelli il cui numero è divisibile per 6 oppure è un numero primo: gli altri sono giorni lavorativi. Se venisse aggiunto ai giorni festivi anche ogni giorno di "ponte", cioè giorno lavorativo preceduto e seguito da un giorno festivo, quanti giorni festivi in più ci sarebbero in ogni anno?

S3. (*11 punti*) Rispetto ad un sistema assegnato di assi cartesiani ortogonali nello spazio, le coordinate di tre dei vertici di un cubo sono (4,0,3), (6,4,1) e (2,8,5). Determina, nel modo più veloce in cui riesci a farlo, le coordinate (rispetto allo stesso sistema) di uno dei rimanenti vertici del cubo.

S4. (*14 punti*) Considera l'insieme dei primi 2016 numeri interi positivi: ad ogni suo sottoinsieme non vuoto associa l'inverso del prodotto dei numeri che lo compongono (ad esempio, se il sottoinsieme è {99, 105, 2001} associa $1/(99 \times 105 \times 2001)$). Quanto vale la somma di tutti numeri che ottieni al variare di tutti i possibili sottoinsiemi non vuoti?

S5. (*18 punti*) Un parallelogramma è inscritto in un esagono regolare (cioè i suoi vertici sono punti di qualche lato dell'esagono) e i centri (di simmetria) dei due poligoni coincidono. Quanto può valere, al massimo, il rapporto fra l'area del parallelogramma e l'area dell'esagono?

S6. (*22 punti*) Per piastrellamento del piano intendiamo una famiglia di figure convesse (eventualmente diverse tra loro per forma e dimensione), ciascuna comprensiva del proprio bordo, contenuta in qualche cerchio e contenente qualche cerchio, tale che ogni punto del piano appartenga a qualche figura, ma figure diverse abbiano in comune al più solo punti dei loro bordi. Le figure vengono dette piastrelle.

1) Sia assegnato un piastrellamento poligonale del piano (cioè ogni piastrella sia un poligono). Dimostra o confuta ciascuna delle seguenti affermazioni.

> a) Se ogni cerchio con centro in un punto P interseca infinite piastrelle, allora P appartiene a infinite piastrelle.
>
> b) Se ogni piastrella contiene un cerchio di raggio 1 ed esiste un numero positivo M tale che ogni piastrella sia contenuta in un cerchio di raggio M, allora ogni punto appartiene ad un numero finito di piastrelle.

2) Sia ora assegnato un piastrellamento generico del piano. Dimostra o confuta la seguente affermazione: se ogni cerchio con centro in un punto P interseca infinite piastrelle, esiste una retta r passante per P tale che ogni segmento di r contenente P al suo interno intersechi infinite piastrelle.

N.B. Per fornire alcune risposte, puoi limitarti a tracciare figure sufficientemente esplicative.

LIVELLO STUDENT

S1. (*5 punti*) Per un certo valore di *n*, 2016 è esprimibile come la radice quadrata della somma dei cubi dei primi *n* interi positivi. Quanto vale *n*? Spiega come l'hai determinato.

Risposta: 63.
Soluzione. È ben noto (per una dimostrazione elementare si veda ad es. "*Dimostrazioni per immagini* ", ed. Kangourou Italia 2016) che la somma dei cubi dei primi *n* interi positivi coincide con il quadrato della somma dei primi *n* interi positivi. 2016 è la somma dei primi 63 interi positivi.

S2. (*7 punti*) Nella strana repubblica di Kang gli anni durano 3000 giorni, numerati da 1 a 3000. I giorni festivi sono quelli il cui numero è divisibile per 6 oppure è un numero primo: gli altri sono giorni lavorativi. Se venisse aggiunto ai giorni festivi anche ogni giorno di "ponte", cioè giorno lavorativo preceduto e seguito da un giorno festivo, quanti giorni festivi in più ci sarebbero in ogni anno?

Risposta: 2.
Soluzione. Certamente si devono aggiungere come giorno di "ponte" il giorno 1 di ciascun anno (compreso tra 3000 divisibile per 6 e 2 primo) e il giorno 4 compreso tra due primi gemelli. Non ci sono altri giorni da aggiungere perché quelli divisibili per 6 non hanno "a distanza 2" né giorni primi (dovrebbero essere pari e diversi da 2), né giorni multipli di 6; i giorni primi possono avere "a distanza 2" altri primi (primi gemelli), ma escluso il caso di 3 e 5, in tutti gli altri casi il numero tra essi compreso è contemporaneamente pari e divisibile per 3 (dato che non lo è nessuno dei due primi *p* e *p*+2) e quindi è già nella lista dei festivi.

S3. (*11 punti*) Rispetto ad un sistema assegnato di assi cartesiani ortogonali nello spazio, le coordinate di tre dei vertici di un cubo sono (4,0,3), (6,4,1) e (2,8,5). Determina, nel modo più veloce in cui riesci a farlo, le coordinate (rispetto allo stesso sistema) di uno dei rimanenti vertici del cubo.

Risposta: un vertice è (0,4,7).

Soluzione. Le distanze fra due vertici di un cubo, fissata la lunghezza dello spigolo, possono assumere solo tre valori diversi: il minore quando i vertici sono adiacenti, quello intermedio quando sono estremi di una diagonale di una faccia, il maggiore quando sono estremi di una diagonale del cubo. Posto $A \equiv (4,0,3)$, $B \equiv (6,4,1)$ e $C \equiv (2,8,5)$, si riscontra facilmente che con la coppia AB siamo nel primo caso, con la coppia BC nel secondo e con la coppia AC nel terzo. Un quarto vertice D è il simmetrico di B rispetto al punto medio $M \equiv (3,4,4)$ di AC e quindi $D \equiv (6 - 6), 8 - 4, 8 - 1)$. In alternativa si può osservare che la traslazione che porta B in A è la stessa che porta C in D: dunque $D \equiv (2 - (6 - 4), 8 - (4 - 0), 5 - (1 - 3))$.

Soluzione alternativa (usando lo strumento dei vettori): i vettori $\overrightarrow{AB} = (2,4,-2)$ e $\overrightarrow{BC} = (-4,4,4)$ sono ortogonali (prodotto scalare nullo!) e, avendo differente modulo, corrispondono a uno spigolo e alla diagonale di una faccia del cubo (mentre il vettore $\overrightarrow{AC} = (-2,8,2)$ il cui modulo è il massimo dei tre corrisponde alla diagonale per il centro del cubo): il quarto vertice D del rettangolo di lati AB e BC è quindi un vertice del cubo e $D = A + \overrightarrow{BC} = (4,0,3) + (-4,4,4)$.

S4. (*14 punti*) Considera l'insieme dei primi 2016 numeri interi positivi: ad ogni suo sottoinsieme non vuoto associa l'inverso del prodotto dei numeri che lo compongono (ad esempio, se il sottoinsieme è {99, 105, 2001} associa $1/(99 \times 105 \times 2001)$). Quanto vale la somma di tutti numeri che ottieni al variare di tutti i possibili sottoinsiemi non vuoti?

Risposta: 2016.

Soluzione. Il calcolo, elementare e veloce, fatto con $n = 2$ e $n = 3$ suggerisce la congettura che, con n generico al posto di 2016, la somma sia n. In effetti ciò è vero. Consideriamo il prodotto $P = (1 + 1/1) \times (1 + 1/2) \times (1 + 1/3) \times \ldots \times (1 + 1/n)$: se lo immaginiamo sviluppato in addendi, ci rendiamo subito conto che la somma che cerchiamo vale $P - 1$. Abbiamo $P = 2/1 \times 3/2 \times 4/3 \times \ldots \times (n + 1)/n = n + 1$.

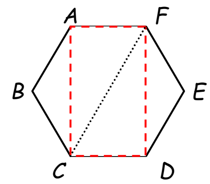
In alternativa, usando il principio di induzione. Per $n = 2$ l'affermazione è vera. Sia vera per n fissato, comunque scelto: per dimostrare che allora è vera per $n + 1$, è sufficiente osservare che, detta S la somma che cerchiamo, si ha $S = S_1 + S_2$ dove S_1 è la somma relativa ai sottoinsiemi di $\{1, \ldots, n + 1\}$ che non contengono $n + 1$, dunque vale n, e S_2 è la somma relativa ai sottoinsiemi di $\{1, \ldots, n + 1\}$ che contengono $n + 1$, dunque vale $n \times 1/(n + 1) + 1/(n + 1)$.

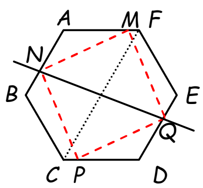
S5. (*18 punti*) Un parallelogramma è inscritto in un esagono regolare (cioè i suoi vertici sono punti di qualche lato dell'esagono) e i centri (di simmetria) dei due poligoni coincidono. Quanto può valere, al massimo, il rapporto fra l'area del parallelogramma e l'area dell'esagono?

Soluzione. Assumiamo che l'area dell'esagono sia 1: ogni rettangolo avente come lati opposti due lati opposti dell'esagono ha allora area 2/3. Mostriamo che nessun parallelogramma inscritto può avere area maggiore.

Versione 1. Siano *ABCD* i vertici, numerati in successione, del parallelogramma; sia quindi *X* un vertice dell'esagono la cui distanza dal segmento *AC* sia la massima possibile: chiaramente nessun altro punto dell'esagono ha distanza maggiore dal segmento *AC* e la distanza del vertice opposto *W* dell'esagono è la stessa, quindi l'area del parallelogramma *AXCW* non è inferiore all'area di *ABCD* (avendo i triangoli *AXC* e *ABC* la stessa base *AC* ed essendo l'altezza del primo non inferiore a quella del secondo). Ripetendo il ragionamento rispetto al parallelogramma *AXCW*, si individuano altri due vertici opposti *Y* e *Z* dell'esagono. Il rettangolo *XYWZ* ha, come si è osservato, area 2/3.

Versione 2. Siano *ABCDEF* i vertici, numerati in successione, dell'esagono: tutti i parallelogrammi che condividono ad es. con *ACDF* la diagonale *CF* e hanno i due restanti vertici sui lati *AB* e *DE* dell'esagono hanno la stessa area di *ACDF* (in quanto tali lati sono paralleli alla diagonale e quindi hanno da essa la stessa distanza di *A* e *D*), mentre se hanno i due restanti vertici sui lati *BC* e *EF* dell'esagono (estremi della diagonale esclusi) hanno dalla diagonale distanza inferiore e quindi hanno area minore di 2/3.





Per finire, se (come nella seconda figura) nessuna delle due diagonali del parallelogramma coincide con una delle diagonali dell'esagono passanti per il centro, osserviamo che l'area di *MNPQ* è certamente minore di quella di *FNCQ*, ove si sono scelti i vertici *F* e *C* dell'esagono che hanno dalla diagonale *NQ* distanza massima (e quindi maggiore di quella di qualunque altro punto dell'esagono, dato che la retta per *N* e *Q* contiene il diametro della circonferenza in cui l'esagono è inscritto) e tale area, come detto sopra, vale 2/3.

S6. (*22 punti*) Per piastrellamento del piano intendiamo una famiglia di figure convesse (eventualmente diverse tra loro per forma e dimensione), ciascuna comprensiva del proprio bordo, contenuta in qualche cerchio e contenente qualche cerchio, tale che ogni punto del piano appartenga a qualche figura, ma figure diverse abbiano in comune al più solo punti dei loro bordi. Le figure vengono dette piastrelle.
1) Sia assegnato un piastrellamento poligonale del piano (cioè ogni piastrella sia un poligono). Dimostra o confuta ciascuna delle seguenti affermazioni.

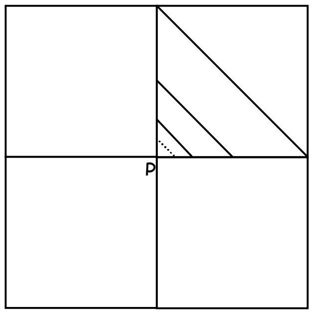
a) Se ogni cerchio con centro in un punto P interseca infinite piastrelle, allora P appartiene a infinite piastrelle.

b) Se ogni piastrella contiene un cerchio di raggio 1 ed esiste un numero positivo M tale che ogni piastrella sia contenuta in un cerchio di raggio M, allora ogni punto appartiene ad un numero finito di piastrelle.

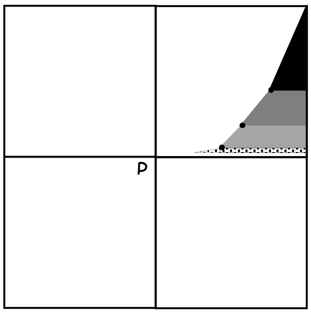
2) Sia ora assegnato un piastrellamento generico del piano. Dimostra o confuta la seguente affermazione: se ogni cerchio con centro in un punto P interseca infinite piastrelle, esiste una retta r passante per P tale che ogni segmento di r contenente P al suo interno intersechi infinite piastrelle.
N.B. Per fornire alcune risposte, puoi limitarti a tracciare figure sufficientemente esplicative.

Risposta: 1a) falsa, 1b) vera, 2) falsa.

Soluzione. Per provare che 1a) è falsa si consideri come contro-esempio il piastrellamento suggerito dalla figura a lato, ove gli infiniti segmenti obliqui sono paralleli e ogni nuovo segmento dista dall'ultimo tracciato metà di quanto questo dista dal penultimo (e il resto del piano è ad es. piastrellato da quadrati). Il punto P appartiene solo ai tre quadrati, ma ogni cerchio centrato in P contiene infinite piastrelle!



Valgano le ipotesi di 1 b) e sia P un punto appartenente ad infinite piastrelle. Per ognuna di queste piastrelle si consideri il più piccolo cono illimitato con vertice in P che la contiene (se P è il vertice di qualche piastrella, il cono è individuato dai due lati della piastrella che vi confluiscono; se P è interno ad un lato di qualche piastrella, il cono è un semipiano): per definizione di piastrellamento, l'unione degli infiniti coni così individuati copre il piano. Potendosi due di questi coni sovrapporre al più solo lungo una delle semirette che li delimitano, il loro numero non è finito, dunque per ogni n vi deve essere un cono C_n di ampiezza (in radianti) più piccola di 1/n. La piastrella contenente P contenuta in C_n deve comunque contenere un cerchio di raggio 1: la distanza del centro di questo cerchio da P deve allora essere non inferiore a n.
In alternativa, si può osservare che, dovendo ogni piastrella essere contenuta in qualche cerchio di raggio M (variabile al variare della piastrella), per la disuguaglianza triangolare tutte le piastrelle che contengono P devono essere contenute nel cerchio di centro P e raggio 2M. Tale cerchio non può evidentemente contenere infiniti cerchi tutti della stessa area che, a due a due, si sovrappongano al più in un punto delle loro circonferenze di bordo. In questo modo si dimostra che 1b) è vera per piastrellamenti generici, non necessariamente poligonali.



2) Falsa. Si consideri come contro-esempio il piastrellamento suggerito dalla figura a fianco, ove i vertici dei lati obliqui dei trapezi rettangoli giacciono ad esempio su un arco di parabola con vertice in P e tangente orizzontale in P e hanno P come punto di accumulazione.

Informazione. Nell'esempio fornito, 2) è falsa relativamente a P, ma risulta vera relativamente ad ogni punto sulla semiretta orizzontale a destra di P e sufficientemente vicino a P: è possibile dimostrare che una simile situazione, se non vale 2), non è evitabile. Si può dimostrare inoltre che, "alzando il problema di una dimensione" (cioè sostituendo, sfere a cerchi, cerchi ad intervalli, piani a rette, ecc.), 2) diventa vera, cioè vale la seguente affermazione:

2') Se ogni sfera nello spazio con centro in un punto P interseca infinite piastrelle, esiste un piano p passante per P tale che ogni cerchio di p contenente P al suo interno intersechi infinite piastrelle.