



## LIVELLO ÉCOLIER

### Tutte le risposte devono essere giustificate

**E1. (5 punti)** Elisa ha scritto il più piccolo numero pari nella cui scrittura compaiono almeno una volta tutte le dieci cifre. Che numero ha scritto? Attenzione: la prima cifra non può essere 0!

**E2. (7 punti)** Alberto, Daniele e Martino sono sportivi. Uno dei tre gioca a calcio, un altro a basket e il rimanente a pallavolo. Il calciatore è figlio unico ed è il più giovane dei tre. Martino è più vecchio del giocatore di basket ed è amico della sorella di Alberto. Qual è il nome del giocatore di basket?

**E3. (11 punti)** Due numeri interi sono tali che il loro prodotto e la loro somma hanno la stessa ultima cifra (cioè quella delle unità). Tra le dieci cifre, quali possono essere l'ultima cifra della somma?

**E4. (14 punti)** La moneta di Kanglandia è il kang. Il cambio euro - kang funziona così: si ottiene 1 kang pagando 2 euro, si ottiene 1 euro pagando 1 kang e proporzionalmente se si cambiano monete di valore inferiore. In entrambe le valute la moneta di valore minimo è quella da un centesimo; si può cambiare qualunque quantità di denaro e il risultato del cambio, se non è esprimibile con un numero intero di centesimi, viene arrotondato al centesimo per eccesso. Se all'inizio cambio 10 euro in kang, poi cambio i kang ottenuti in euro, poi cambio gli euro ottenuti in kang e procedo in questo modo, posso rimanere senza denaro?

**E5. (18 punti)** Sul tavolo ci sono 100 oggetti di pesi molto vicini tra loro (alcuni potrebbero avere addirittura lo stesso peso): mi hanno detto che i 5 oggetti più pesanti, elencati in ordine di peso decrescente, sono A, B, C, D ed E. Voglio controllare l'affermazione, ma ho solo una bilancia a due piatti e su ogni piatto può stare un solo oggetto: quindi posso solo confrontare i pesi di due oggetti per volta. Qual è il minimo numero di confronti che mi consente di controllare l'affermazione?

**E6. (22 punti)** L'alunno Fox per essere promosso deve sostenere una prova a risposta chiusa, rispondendo correttamente a tutte le domande. Può scegliere tra due buste:

- la busta A che contiene 5 quesiti, ciascuno con 2 risposte,
- la busta B che contiene 2 quesiti, ciascuno con 6 risposte.

Fox è impreparato e pensa di rispondere a caso ai quesiti. Per cercare di essere promosso, gli conviene scegliere la busta A o la B?



Kangourou della Matematica 2016  
finale nazionale italiana  
Cervia, 9 maggio 2016



## LIVELLO ÉCOLIER

**E1. (5 punti)** Elisa ha scritto il più piccolo numero pari nella cui scrittura compaiono almeno una volta tutte le dieci cifre. Che numero ha scritto? Attenzione: la prima cifra non può essere 0!

**Risposta:** 1.023.456.798.

**Soluzione.** La prima cifra deve essere la più piccola non nulla, cioè 1; poi si devono scrivere tutte le cifre in ordine crescente, limitandosi a scambiare 8 e 9 in modo da avere un numero pari.

**E2. (7 punti)** Alberto, Daniele e Martino sono sportivi. Uno dei tre gioca a calcio, un altro a basket e il rimanente a pallavolo. Il calciatore è figlio unico ed è il più giovane dei tre. Martino è più vecchio del giocatore di basket ed è amico della sorella di Alberto. Qual è il nome del giocatore di basket?

**Risposta:** Alberto.

**Soluzione.** Martino non è il giocatore di basket, poiché i due hanno un'età diversa; e non è il calciatore, poiché non è sicuramente il più giovane dei tre: quindi è il pallavolista; il calciatore essendo figlio unico non può essere Alberto che ha una sorella e quindi sarà Daniele. Dunque il giocatore di basket è Alberto.

**E3. (11 punti)** Due numeri interi sono tali che il loro prodotto e la loro somma hanno la stessa ultima cifra (cioè quella delle unità). Tra le dieci cifre, quali possono essere l'ultima cifra della somma?

**Risposta:** 0, 2 e 4.

**Soluzione.** Osserviamo che, per soddisfare le condizioni, i due numeri devono essere entrambi pari: infatti se fossero entrambi dispari la somma sarebbe pari e il prodotto dispari e a rovescio se fossero uno pari e uno dispari. Inoltre basta prendere in esame i numeri pari da 0 a 8, poiché la cifra delle unità nella somma dipende esclusivamente dalle cifre delle unità dei due addendi e nel prodotto da quelle dei due fattori.

Ora  $0 + 0 = 0 = 0 \times 0$ ,  $2 + 2 = 4 = 2 \times 2$  e la cifra delle unità di  $4 + 8 = 12$  è uguale a quella di  $4 \times 8 = 32$ .

D'altra parte in tutti gli altri casi la somma di due cifre è diversa dal loro prodotto, come si vede ad esempio controllando le tabelle dell'addizione e della moltiplicazione:

+	0	2	4	6	8
0	0	2	4	6	8
2		4	6	8	10
4			8	10	12
6				12	14
8					16

x	0	2	4	6	8
0	0	0	0	0	0
2		4	8	12	16
4			16	24	32
6				36	48
8					64

**E4. (14 punti)** La moneta di Kanglandia è il *kang*. Il cambio euro - *kang* funziona così: si ottiene 1 *kang* pagando 2 euro, si ottiene 1 euro pagando 1 *kang* e proporzionalmente se si cambiano monete di valore inferiore. In entrambe le valute la moneta di valore minimo è quella da un centesimo; si può cambiare qualunque quantità di denaro e il risultato del cambio, se non è esprimibile con un numero intero di centesimi, viene arrotondato al centesimo per eccesso. Se all'inizio cambio 10 euro in *kang*, poi cambio i *kang* ottenuti in euro, poi cambio gli euro ottenuti in *kang* e procedo in questo modo, posso rimanere senza denaro?

**Risposta:** Non posso restare senza denaro; resto con 1 centesimo (di euro o di *kang*).

**Soluzione.** Al primo cambio ottengo 5 *kang*, al secondo 5 euro, al terzo 2,50 *kang* e così via; ad ogni cambio dispari ottengo un numero di *kang* che è la metà del precedente cambio dispari, arrotondata per eccesso se il quoziente non dà un numero intero di centesimi. È chiaro che, dopo un certo numero di cambi (non importa quanti), il quoziente dell'ultima divisione per 2 scenderà sotto il centesimo ma non sarà zero e quindi, arrotondando per eccesso, mi verrà dato in cambio un centesimo di *kang*. Per lo stesso motivo il cambio nel seguito rimane stabile.

Giusto per soddisfare la curiosità, ecco che cosa succede:

cambio	5°	7°	9°	11°	13°	15°	17°	19°	21°
<i>kang</i>	1,25	0,63	0,32	0,16	0,08	0,04	0,02	0,01	0,01

**E5. (18 punti )** Sul tavolo ci sono 100 oggetti di pesi molto vicini tra loro (alcuni potrebbero avere addirittura lo stesso peso): mi hanno detto che i 5 oggetti più pesanti, elencati in ordine di peso decrescente, sono A, B, C, D ed E. Voglio controllare l'affermazione, ma ho solo una bilancia a due piatti e su ogni piatto può stare un solo oggetto: quindi posso solo confrontare i pesi di due oggetti per volta. Qual è il minimo numero di confronti che mi consente di confermare l'affermazione?

**Risposta:** 99.

**Soluzione.** Si può iniziare a confrontare E con ciascuno dei 95 oggetti scartati, poi si può confrontare E con D, D con C, C con B e B con A. Occorre e basta che ognuno di questi 99 confronti dia la risposta attesa perché il lavoro risulti ben fatto. D'altra parte, 99 confronti sono necessari perché occorre che ciascun oggetto, tranne A, risulti più leggero in almeno un confronto.

**E6. (22 punti )** L'alunno Fox per essere promosso deve sostenere una prova a risposta chiusa, rispondendo correttamente a tutte le domande. Può scegliere tra due buste:

- la busta A che contiene 5 quesiti, ciascuno con 2 risposte,
- la busta B che contiene 2 quesiti, ciascuno con 6 risposte.

Fox è impreparato e pensa di rispondere a caso ai quesiti. Per cercare di essere promosso, gli conviene scegliere la busta A o la B?

**Risposta:** la busta A.

**Soluzione.** Se sceglie la busta A, Fox deve sperare di azzeccare la cinquina corretta su  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$  quintine di risposte possibili. Se sceglie la busta B, deve sperare di azzeccare la coppia corretta su  $6 \times 6 = 36$  coppie di risposte possibili.