Kangourou della Matematica 2015
Coppa a squadre Kangourou - finale
Cervia, 10 maggio 2015

Quesiti

1. La percentuale

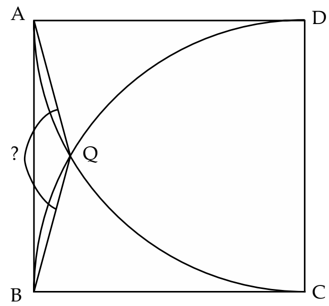
Un numero *A* è superato del 25% (rispetto a se stesso) da un numero *B*. Di quale percentuale il numero *B* (rispetto a se stesso) supera il numero *A*?

2. Cinque cifre dispari

Quanti sono i multipli (interi positivi) di 9 la cui scrittura consiste di cinque cifre dispari di cui almeno quattro tutte diverse tra loro?

3. All'interno di un quadrato

Osservate la figura. *ABCD* è un quadrato all'interno del quale sono tracciati il quarto di circonferenza con centro in *D* passante per *A* e *C* e il quarto di circonferenza con centro in *C* passante per *B* e *D*. I due quarti di circonferenza si intersecano in *Q*. Qual è la misura in gradi dell'angolo *AQB*?



4. Giovani e adulti

L'età media di un gruppo di amici "giovani" è 25 anni; quella di un gruppo di amici "adulti" è 45 anni. Ognuno dei due gruppi è composto da meno di 20 persone. Se i due gruppi si riuniscono, l'età media è di 36 anni. Quanti sono i componenti del gruppo di "adulti"?

5. Un numero fortunato

Alcuni credono che il 17 porti fortuna. Allora diciamo che un numero intero positivo è *fortunato* se la somma delle sua cifre è divisibile per 17 e, quando gli viene sommato 1, la somma delle cifre del nuovo numero ottenuto è ancora divisibile per 17. Qual è il più piccolo numero fortunato?

6. Resti e divisioni

Qual è il più piccolo numero intero positivo che diviso per 10 dà resto 9, diviso per 9 dà resto 8, diviso per 8 dà resto 7 e così via fino a: "diviso per 2 dà resto 1"?

7. La griglia 3 × 3

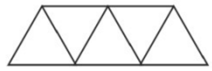
In ogni cella di una griglia 3 × 3 è inserito uno e un solo numero intero positivo in modo che i sei numeri ottenibili sommando quelli inseriti in ogni singola riga e quelli inseriti in ogni singola colonna siano sei numeri primi tutti diversi fra loro. I 9 numeri inseriti nella griglia, invece, non sono necessariamente tutti diversi fra loro. Qual è il valore minimo possibile per la somma di questi 9 numeri?

8. Daniela e i numeri primi

Daniela sceglie 20 numeri interi primi a suo piacere, tutti diversi fra loro. Poi li moltiplica a due a due in tutti i modi possibili (a meno dell'ordine: ad esempio il prodotto 3×5 e il prodotto 5×3 corrispondono ad un solo modo; non moltiplica mai un numero per se stesso). Infine somma a due a due in tutti i modi possibili i prodotti così ottenuti. Qual è il massimo numero di somme dispari che potrebbe ottenere?

9. Tre colori

Ogni segmento di quelli in figura va dipinto di rosso, di verde o di blu in modo che ogni triangolo abbia un lato rosso, un lato verde o un lato blu. In quanti modi diversi può essere effettuata questa operazione?



10. Una strana classe

Una strana classe è composta da 6 coppie di gemelli. I 12 studenti vanno ripartiti in tre squadre di quattro studenti ciascuna, che si sfideranno in una gara, in modo che nessuna squadra abbia tra i suoi componenti sia uno studente, sia il suo gemello. In quanti diversi modi si possono comporre le tre squadre?

11. Le cifre di Cristina

Fra le cifre da 1 a 9 Cristina ne sceglie quattro tutte diverse fra loro. Le raggruppa poi a coppie e ordina le due coppie così ottenute, in modo da formare due numeri interi di due cifre dei quali calcola il prodotto. Dopo avere effettuato questa operazione in tutti i modi possibili, si accorge che la differenza fra il maggiore e il minore dei prodotti ottenuti è esattamente 1000. Scrivete in ordine crescente le quattro cifre scelte da Cristina.

12. In perfetto orario

A Franco piace muoversi in bicicletta, anche se deve compiere lunghi tragitti. Partendo in un dato istante e pedalando alla velocità di 20 km all'ora, arriverebbe ad un appuntamento con un'ora di ritardo; partendo nello stesso istante e pedalando alla velocità di 30 km all'ora vi arriverebbe con un'ora di anticipo. A quanti chilometri all'ora deve pedalare se, partendo in quell'istante, vuole arrivare in perfetto orario?

13. Il cubo

In un cubo vengono scelti 27 punti: tutti i vertici, i punti medi di ogni spigolo, i punti centrali di ogni faccia e il punto centrale del cubo. Quante diverse terne di punti allineati si possono individuare in questo insieme di 27 punti?

14. Numeri 2015-sbilanciati

Un numero intero positivo di 7 cifre è detto *2015-sbilanciato* se accade quanto segue: il prodotto delle sue prime quattro cifre vale 20 e il prodotto delle sue ultime quattro cifre vale 15. Quanti numeri 2015-sbilanciati esistono?

15. Un metro

Avete a disposizione barrette lunghe 9 cm e barrette lunghe 12 cm, in quantità illimitata. Allineandone alcune una dopo l'altra, senza sovrapposizioni neppure parziali, volete formare una barra lunga esattamente un metro. Quante possibilità avete, se non tenete conto dell'ordine in cui le barrette si susseguono?

Kangourou della Matematica 2015
Coppa a squadre Kangourou - finale
Cervia, 10 maggio 2015

Quesiti e soluzioni

1. La percentuale

Un numero A è superato del 25% (rispetto a se stesso) da un numero B. Di quale percentuale il numero B (rispetto a se stesso) supera il numero A?

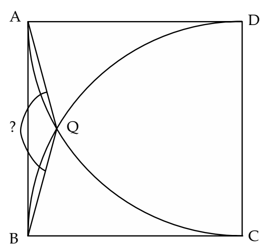
[0020] Da $B = A + A/4$ segue $A/4 = B/5$.

2. Cinque cifre dispari

Quanti sono i multipli (interi positivi) di 9 la cui scrittura consiste di cinque cifre dispari di cui almeno quattro tutte diverse tra loro?

[0240] La somma delle cinque cifre dispari non è divisibile per 9: allora una e solo una delle cifre deve essere ripetuta. Fissata la cifra da ripetere e fissate le altre tre, si ottengono $6 \times 10 = 60$ numeri diversi: infatti vi sono 10 possibili diverse coppie (non ordinate) di posizioni in cui collocare la cifra da ripetere e le rimanenti tre cifre possono essere permutate in 6 modi diversi. La somma delle cifre deve essere divisibile per 9. Può allora essere ripetuta la cifra 9 se e solo se le altre sono 1, 3 e 5. Può essere ripetuta la cifra 7 se e solo se le altre sono 1, 3 e 9. Può essere ripetuta la cifra 5 se e solo se le altre sono 1, 7 e 9. Può essere ripetuta la cifra 3 se e solo se le altre sono 5, 7 e 9. Non può essere ripetuta la cifra 1.

3. All'interno di un quadrato



Osservate la figura. *ABCD* è un quadrato all'interno del quale sono tracciati il quarto di circonferenza con centro in *D* passante per *A* e *C* e il quarto di circonferenza con centro in *C* passante per *B* e *D*. I due quarti di circonferenza si intersecano in *Q*. Qual è la misura in gradi dell'angolo *AQB*?

[0150] Il triangolo *QDC* è equilatero (avendo i lati lunghi quanto il raggio degli archi di circonferenza). Allora gli angoli alla base dei triangoli isosceli *AQD* e *QBC* misurano 75 gradi ciascuno. La misura in gradi di *AQB* vale allora $360 - (75 + 60 + 75)$.

4. Giovani e adulti

L'età media di un gruppo di amici "giovani" è 25 anni; quella di un gruppo di amici "adulti" è 45 anni. Ognuno dei due gruppi è composto da meno di 20 persone. Se i due gruppi si riuniscono, l'età media è di 36 anni. Quanti sono i componenti del gruppo di "adulti"?

[0011] Sia g il numero dei giovani e a quello degli adulti: deve essere $25g + 45a = 36(g + a)$ cioè $20a = 11(g + a)$. Da $a < 20$, essendo 11 e 20 primi fra loro, segue $a = 11$.

5. Un numero fortunato

Alcuni credono che il 17 porti fortuna. Allora diciamo che un numero intero positivo è *fortunato* se la somma delle sua cifre è divisibile per 17 e, quando gli viene sommato 1, la somma delle cifre del nuovo numero ottenuto è ancora divisibile per 17. Qual è il più piccolo numero fortunato?

[8899] Affinché, aggiungendo 1 ad un numero intero positivo, la somma delle sue cifre subisca una variazione di un multiplo di 17, è necessario che la somma di 1 comporti almeno due riporti successivi. Il numero cercato deve dunque terminare con 99. Se si vuole che sia il più piccolo possibile, ricordando che la somma delle sue cifre deve essere divisibile per 17, occorre e basta che 99 sia preceduto da 88.

6. Resti e divisioni

Qual è il più piccolo numero intero positivo che diviso per 10 dà resto 9, diviso per 9 dà resto 8, diviso per 8 dà resto 7 e così via fino a: "diviso per 2 dà resto 1"?

[2519] Il numero cercato n è il più piccolo intero positivo tale che $n + 1$ risulti divisibile per tutti gli interi da 2 a 10. Tenendo conto dei fattori primi comuni agli interi da 2 a 10, si ottiene
$n + 1 = 5 \times 7 \times 8 \times 9 = 2520$.

7. La griglia 3 × 3

In ogni cella di una griglia 3 × 3 è inserito uno e un solo numero intero positivo in modo che i sei numeri ottenibili sommando quelli inseriti in ogni singola riga e quelli inseriti in ogni singola colonna siano sei numeri primi tutti diversi fra loro. I 9 numeri inseriti nella griglia, invece, non sono necessariamente tutti diversi fra loro. Qual è il valore minimo possibile per la somma di questi 9 numeri?

[0029] Una soluzione con somma 29 è la seguente:

1	2	2
1	10	2
1	7	3

La somma S non può essere inferiore. Infatti si deve avere $2S \geq 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 = 56$ da cui $S \geq 28$; d'altra parte S, quale somma di un numero dispari di interi dispari, deve essere un intero dispari.

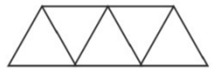
8. Daniela e i numeri primi

Daniela sceglie 20 numeri interi primi a suo piacere, tutti diversi fra loro. Poi li moltiplica a due a due in tutti i modi possibili (a meno dell'ordine: ad esempio il prodotto 3 × 5 e il prodotto 5 × 3 corrispondono ad un solo modo; non moltiplica mai un numero per se stesso). Infine somma a due a due in tutti i modi possibili i prodotti così ottenuti. Qual è il massimo numero di somme dispari che potrebbe ottenere?

[3249] Per ottenere una somma dispari occorre sommare un numero pari con un numero dispari. Per avere a disposizione un prodotto pari occorre che almeno uno dei fattori sia pari. L'unico numero primo pari è 2: occorre dunque che tra i 20 numeri scelti da Daniela ci sia 2. In tal caso i diversi prodotti pari disponibili sono 19, quelli dispari sono $19 \times 18/2 = 171$. Le coppie (non ordinate) formate da un prodotto pari e da un prodotto dispari sono allora in numero di 19×171.

9. Tre colori

Ogni segmento di quelli in figura va dipinto di rosso, di verde o di blu in modo che ogni triangolo abbia un lato rosso, un lato verde o un lato blu. In quanti modi diversi può essere effettuata questa operazione?



[0096] Vi sono 6 diversi modi di dipingere i lati del primo triangolo da sinistra. Per ognuno di essi vi sono 2 diversi modi di dipingere i lati del secondo triangolo da sinistra e così via. Il numero cercato è dunque 6×2^4.

10. Una strana classe

Una strana classe è composta da 6 coppie di gemelli. I 12 studenti vanno ripartiti in tre squadre di quattro studenti ciascuna, che si sfideranno in una gara, in modo che nessuna squadra abbia tra i suoi componenti sia uno studente, sia il suo gemello. In quanti diversi modi si possono comporre le tre squadre?

[0960] Chiamiamo A, B e C le tre squadre. Per comporre la squadra A, si scelgano quattro coppie di gemelli su 6: le scelte possibili di queste coppie sono in numero di 15 (quante quelle delle due coppie da scartare). Ognuna di queste scelte, prendendo uno e uno solo dei due gemelli da ogni coppia, fornisce 15×2^4 composizioni possibili. Per comporre la squadra B rendendo possibile la composizione della squadra C, si devono prendere due dei quattro gemelli rimasti dopo la prima selezione e uno da ciascuna delle due coppie non considerate prima: questo può essere fatto in 6×4 modi diversi. A questo punto la squadra C risulta automaticamente composta.
Il numero $15 \times 16 \times 24$ fornisce dunque i modi diversi di comporre le tre squadre assegnando a ciascuna un nome. Poiché la differenziazione delle squadre per assegnazione dei nomi non va considerata, il numero $15 \times 16 \times 24$ va diviso per 6, quante sono le possibili permutazioni dei tre nomi.

11. Le cifre di Cristina

Fra le cifre da 1 a 9 Cristina ne sceglie quattro tutte diverse fra loro. Le raggruppa poi a coppie e ordina le due coppie così ottenute, in modo da formare due numeri interi di due cifre dei quali calcola il prodotto. Dopo avere effettuato questa operazione in tutti i modi possibili, si accorge che la differenza fra il maggiore e il minore dei prodotti ottenuti è esattamente 1000. Scrivete in ordine crescente le quattro cifre scelte da Cristina.

[1234] Siano A, B, C, D quattro cifre tutte diverse da 0 e diverse fra loro elencate in ordine crescente.
Prima soluzione. Da $(10D + A)(10C + B) - (10A + D)(10B + C) = 99(C \times D - A \times B)$ (il secondo prodotto non è il minore dei prodotti possibili relativamente alle cifre assegnate, è stato scelto solo per abbreviare i calcoli), segue facilmente che la differenza tra il maggiore e il minore dei prodotti possibili è maggiore di 1000 se le quattro cifre non sono consecutive (infatti in tal caso si ha comunque $C \times D - A \times B > 11$). Il maggiore dei prodotti è $(10D + A)(10C + B)$ e il minore è $(10A + C)(10B + D)$: infatti per ottenere il maggiore occorre e basta che C e D siano le cifre delle decine dei due fattori e che vengano ad esse abbinate come cifre delle unità rispettivamente B (che verrà moltiplicata per la più grande cifra delle decine D) ed A. Simmetricamente si ragiona per ottenere il

valore minimo. (Entrambe le affermazioni sono facilmente verificabili con un calcolo diretto.) Se $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$ e $D = 4$ la loro differenza è esattamente 1000 e si vede facilmente che è la minore possibile al variare delle quattro cifre consecutive.

Soluzione alternativa. Qualunque siano le quattro cifre, si trova come sopra che il maggiore dei prodotti è $(10D + A)(10C + B)$ e il minore è $(10A + C)(10B + D)$. Possiamo riscrivere $(10D + A)(10C + B) - (10A + C)(10B + D) = 1000$ come

$$100(CD - AB) + 10(AC + BD - AD - CB) + AB - CD = 1000.$$

La cifra delle unità nel primo membro deve essere 0, quindi $CD - AB$ deve essere un multiplo di 10; il fatto che sia anche il coefficiente di 100 permette con facili osservazioni di scartare tutti i valori maggiori di 10, quindi $CD - AB = 0$ oppure $CD - AB = 10$. $CD - AB = 0$ implicherebbe $AC + BD - AD - CB = 100$, impossibile, quindi $CD - AB = 10$ e l'equazione che stiamo considerando diviene $AC + BD - AD - CB - 1 = 0$, cioè $(D - C)(B - A) = 1$. Allora $D = C + 1$, $B = A + 1$ e $CD - AB = 10$ diventa $(C - A)(C + A + 1) = 10$ che ha per soluzione solo $A = 1, C = 3$.

12. In perfetto orario

A Franco piace muoversi in bicicletta, anche se deve compiere lunghi tragitti. Partendo in un dato istante e pedalando alla velocità di 20 km all'ora, arriverebbe ad un appuntamento con un'ora di ritardo; partendo nello stesso istante e pedalando alla velocità di 30 km all'ora vi arriverebbe con un'ora di anticipo. A quanti chilometri all'ora deve pedalare se, partendo in quell'istante, vuole arrivare in perfetto orario?

[0024] Detto x il tempo disponibile, in ore, per arrivare all'appuntamento, si ha $20(x + 1) = 30(x - 1)$. Si ricava $x = 5$. Il numero cercato è allora $20 \times 6/5$.

13. Il cubo

In un cubo vengono scelti 27 punti: tutti i vertici, i punti medi di ogni spigolo, i punti centrali di ogni faccia e il punto centrale del cubo. Quante diverse terne di punti allineati si possono individuare in questo insieme di 27 punti?

[0049] Ognuna delle 6 facce ospita 4 terne di punti allineati non contenute in alcuno spigolo (e dunque in alcuna altra faccia); ogni spigolo ospita una terna. Queste 24 + 12 terne sono tutte e sole quelle che non includono il centro del cubo. Quelle che includono il centro sono le 4 giacenti sulle diagonali e quelle giacenti sui tre piani passanti per il centro e paralleli a qualche faccia: queste ultime sono 4 per ognuno dei tre piani, ma così facendo 3 terne vengono contate due volte. In totale dunque le terne sono 24 + 12 + 4 + 12 – 3.

14. Numeri 2015-sbilanciati

Un numero intero positivo di 7 cifre è detto *2015-sbilanciato* se accade quanto segue: il prodotto delle sue prime quattro cifre vale 20 e il prodotto delle sue ultime quattro cifre vale 15. Quanti numeri 2015-sbilanciati esistono?

[0072] I fattori comuni a 20 e a 15 sono 1 e 5: questi sono gli unici valori possibili per la cifra centrale. Se la cifra centrale è 1, le prime tre cifre possono essere solo {1,4,5} o {2,2,5} che forniscono rispettivamente 6 e 3 possibilità, le ultime tre cifre devono essere necessariamente {1,3,5} che forniscono 6 possibilità. Se la cifra centrale è 5, le prime tre cifre possono essere solo {1,1,4} o {2,2,4} che forniscono in entrambi i casi 3 possibilità, le ultime tre cifre devono essere necessariamente {1,1,3} che forniscono 3 possibilità. Il numero cercato è allora $9 \times 6 + 6 \times 3$.

15. Un metro

Avete a disposizione barrette lunghe 9 cm e barrette lunghe 12 cm, in quantità illimitata. Allineandone alcune una dopo l'altra, senza sovrapposizioni neppure parziali, volete formare una barra lunga esattamente un metro. Quante possibilità avete, se non tenete conto dell'ordine in cui le barrette si susseguono?

[0000] Per nessun valore intero non negativo di $k < 8$, $100 - 12k$ è divisibile per 9. Allora non si può avere $100 = 12k + 9h$ con h, k interi non negativi e dunque non è possibile ottenere quanto si chiede.