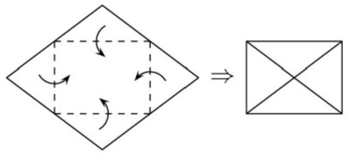
Università degli Studi
di Milano

Quesiti

1. La busta

La figura mostra in che modo, ripiegando opportunamente un foglio di carta a forma di rombo, si può ottenere una busta. Se i lati della busta così ottenuta sono lunghi 12 e 16 cm, quanti centimetri è lungo il lato del rombo?



2. Quattro cifre dispari

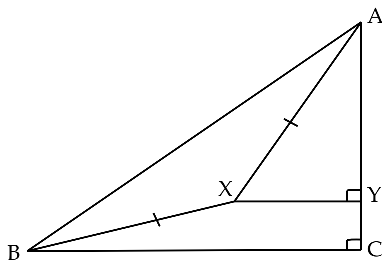
Quanti sono i multipli (interi positivi) di 9 la cui scrittura consiste di quattro cifre dispari tutte diverse tra loro?

3. Gli angoli del poligono

Per un poligono si consideri la seguente proprietà (P): ognuno dei suoi angoli interni misura 168 o 169 gradi. Scrivete nell'ordine il minimo e il massimo numero possibile di lati per un poligono che abbia la proprietà (P). Scrivete 0000 se non esistono poligoni con la proprietà (P).

4. Il triangolo

Osservate la figura (che non rispetta necessariamente i dati, è solo indicativa). I triangoli ABC e AXY sono rettangoli rispettivamente in C e in Y, i segmenti AX e BX hanno la stessa lunghezza, il segmento AX biseca l'angolo BAC e la misura dell'angolo AXY è 7 volte quella dell'angolo XBC. Qual è la misura in gradi dell'angolo ABC?



5. Gemelli in gara

Una strana classe è composta da 6 coppie di gemelli. I 12 studenti vanno ripartiti in due squadre di 6 elementi ciascuna, che si sfideranno in una gara, in modo che nessuna squadra abbia tra i suoi componenti sia uno studente, sia il suo gemello. In quanti diversi modi si possono comporre le due squadre?

6. I quadrati di Giuseppe

Utilizzando il suo gioco-traforo, Giuseppe può fabbricare tavolette di legno quadrate di qualunque taglia (ragionevole), purché il lato misuri un numero intero di centimetri. Una di queste tavolette va inserita all'interno di un anello metallico circolare di raggio 8 cm. Quanti centimetri misura il lato della più grande tavoletta che Giuseppe può fabbricare allo scopo?

7. Numeri imparziali

Denotiamo con CDU il numero di tre cifre in cui C è la cifra delle centinaia, D quella delle decine e U quella delle unità. Diciamo che CDU è "imparziale" se accade che $C > D > U > 0$ e tutte le cifre della somma $CDU + UDC$ sono dispari. Siano M e m rispettivamente il più grande e il più piccolo dei numeri imparziali. Quanto vale $M + m$?

8. Due circonferenze

I centri di due circonferenze di raggio 1 metro distano $\sqrt{3}$ metri. Considerate uno qualunque dei punti in cui le circonferenze si incontrano e, per ciascuna di esse, tracciate la retta ad essa tangente in quel punto. Quanti gradi misura il maggiore dei quattro angoli formati da queste due rette?

9. I mattoncini

Cecilia ha 100 mattoncini uguali: ognuno ha la forma di un parallelepipedo lungo 3 cm, largo 2 cm e alto 1 cm. Dopo che, accostandone alcuni, ha formato un cubo, quanti gliene sono rimasti?

10. Cani, gatti e galline

Un prato quadrato di area 900 m^2 è recintato. Il proprietario vuole lasciarvi scorrazzare alcuni cani, alcuni gatti e alcune galline, ma vuole evitare che animali di specie diverse vengano a contatto fra loro. Decide allora di suddividerlo in tre appezzamenti rettangolari tutti della stessa area, ciascuno separato dagli altri tramite una rete. Vuole ridurre al minimo la lunghezza della rete da usare (che potrà essere tagliata nel modo più opportuno). Quanti metri di rete gli basterà acquistare?

11. Avanti e indietro

Per allenarsi, un giorno Ernesto decide di fare un esperimento: partendo da un certo punto di una strada diritta inizia a fare un passo avanti, poi ne fa due avanti e uno indietro, poi tre avanti e due indietro, poi quattro avanti e tre indietro e così via. Un passo di Ernesto, è sempre lungo esattamente un metro. Quando raggiunge la distanza di 80 metri dal punto da cui era partito, decide di fermarsi. Quanti metri ha percorso Ernesto prima di fermarsi?

12. Il parallelepipedo

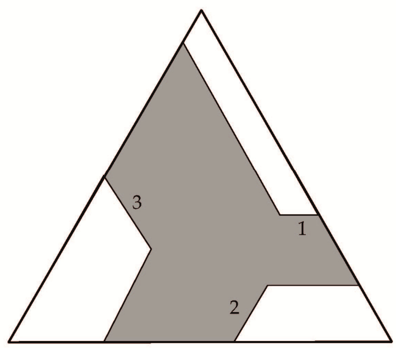
Le lunghezze dei lati di un parallelepipedo rettangolo sono espresse da numeri interi di centimetri. Le aree di due delle facce sono 24 e 30 centimetri quadrati. Quanti centimetri cubi può valere, al massimo, il volume del parallelepipedo?

13. Un numero e il suo quadrato

Considerate il numero 999...999 nella cui scrittura compare solo la cifra 9 ripetuta 99 volte. Quanto vale la somma delle cifre del quadrato di questo numero?

14. L'ennagono

Nella figura è ombreggiato un ennagono interamente contenuto in un triangolo equilatero di lato 15. Ogni lato dell'ennagono è parallelo a qualche lato del triangolo. Come indicato, tre dei suoi lati hanno misure 1, 2 e 3 (la figura non è in scala). Quanto misura il perimetro dell'ennagono?



15. La divisione per 2015

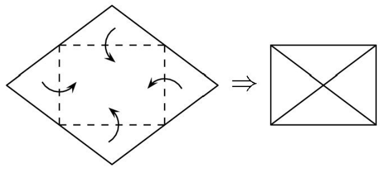
Un numero N diviso per 2015 dà resto 2. Qual è il resto della divisione di N^{11} per 2015?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO

Quesiti e soluzioni

1. La busta

La figura mostra in che modo, ripiegando opportunamente un foglio di carta a forma di rombo, si può ottenere una busta. Se i lati della busta così ottenuta sono lunghi 12 e 16 cm, quanti centimetri è lungo il lato del rombo?



[0020] Il lato del rombo è lungo quanto la diagonale della busta.

2. Quattro cifre dispari

Quanti sono i multipli (interi positivi) di 9 la cui scrittura consiste di quattro cifre dispari tutte diverse tra loro?

[0024] Occorre e basta che la somma delle quattro cifre sia un multiplo di nove: poiché le cifre devono essere dispari e tutte diverse fra loro, esse non possono essere che 1, 3, 5 e 9. Permutandole in tutti i modi possibili si ottengono 24 numeri.

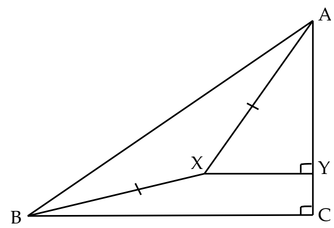
3. Gli angoli del poligono

Per un poligono si consideri la seguente proprietà (*P*): ognuno dei suoi angoli interni misura 168 o 169 gradi. Scrivete nell'ordine il minimo e il massimo numero possibile di lati per un poligono che abbia la proprietà (*P*). Scrivete 0000 se non esistono poligoni con la proprietà (*P*).

[3032] Un poligono che goda della proprietà (*P*) deve essere convesso. Il minimo <risp. il massimo> numero possibile di lati si ottiene quando il numero degli angoli da 168 gradi <risp. 169 gradi> è il massimo possibile. La somma delle misure in gradi degli angoli interni di un poligono convesso di n lati vale $n \times 180 - 360$. Poiché 360 è divisibile per $180 - 168 = 12$ con quoziente 30, esistono poligoni con gli angoli interni tutti di 168 gradi e hanno 30 lati. D'altra parte, 360 non è divisibile per $180 - 169 = 11$ e il più grande intero positivo k tale che $360 - k \times 11$ sia divisibile per 12 è 24. Da $360 = 24 \times 11 + 8 \times 12$ segue che un poligono convesso può avere 24 angoli da 169 gradi e 8 da 168 gradi.

4. Il triangolo

Osservate la figura (che non rispetta necessariamente i dati, è solo indicativa). I triangoli *ABC* e *AXY* sono rettangoli rispettivamente in *C* e in *Y*, i segmenti *AX* e *BX* hanno la stessa lunghezza, il segmento *AX* biseca l'angolo *BAC* e la misura dell'angolo *AXY* è 7 volte quella dell'angolo *XBC*. Qual è la misura in gradi dell'angolo *ABC*?



[0036] Detta x la misura in gradi di ciascuno degli angoli *BAX*, *XAC* e *ABX*, x deve soddisfare la condizione $7(90 - 3x) = 90 - x$, quindi $x = 27$. La misura dell'angolo *ABC* è $90 - 2x$.

5. Gemelli in gara

Una strana classe è composta da 6 coppie di gemelli. I 12 studenti vanno ripartiti in due squadre di 6 elementi ciascuna, che si sfideranno in una gara, in modo che nessuna squadra abbia tra i suoi componenti sia uno studente, sia il suo gemello. In quanti diversi modi si possono comporre le due squadre?

[0032] Chiamiamo A e B le due squadre. Composta A, risulta automaticamente composta anche B. Per comporre A, da ogni coppia di gemelli ne va estratto uno e uno solo. Per ogni coppia vi sono due scelte possibili, dunque sono in numero di 2^6 le composizioni possibili della squadra A. D'altra parte, poiché la differenziazione delle squadre per assegnazione dei nomi non va considerata, il numero 64 va diviso per due, quante sono le possibili permutazioni dei due nomi.

6. I quadrati di Giuseppe

Utilizzando il suo gioco-traforo, Giuseppe può fabbricare tavolette di legno quadrate di qualunque taglia (ragionevole), purché il lato misuri un numero intero di centimetri. Una di queste tavolette va inserita all'interno di un anello metallico circolare di raggio 8 cm. Quanti centimetri misura il lato della più grande tavoletta che Giuseppe può fabbricare allo scopo?

[0011] Per massimizzare la dimensione della tavoletta è ovviamente opportuno pensare di inserirla centrandola nel centro del disco. Allora la diagonale della tavoletta, che è lunga $\sqrt{2} \times n$ se il lato è lungo n, non deve superare 16 che è il diametro del disco: n deve dunque essere il più grande intero tale che $2 \times n^2 \leq 16^2$. Da $2 \times 11^2 = 242 < 16^2 = 256 < 2 \times 12^2 = 288$ segue $n = 11$.

7. Numeri imparziali

Denotiamo con CDU il numero di tre cifre in cui C è la cifra delle centinaia, D quella delle decine e U quella delle unità. Diciamo che CDU è "imparziale" se accade che $C > D > U > 0$ e tutte le cifre della somma $CDU + UDC$ sono dispari. Siano M e m rispettivamente il più grande e il più piccolo dei numeri imparziali. Quanto vale $M + m$?

[1785] È chiaro che $U + C$ deve essere dispari e almeno 11 (altrimenti la cifra delle decine di $CDU + UDC$, fornita da $2D$, sarebbe pari). È altrettanto chiaro $2D + 1$ deve essere minore di 10 in modo da non dare riporto ($U + C + 1$ risulterebbe pari). Ricordando che deve essere $C > D > U > 0$, facilmente segue $M = 942$ e $m = 843$.

8. Due circonferenze

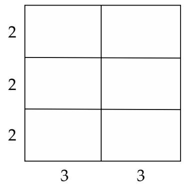
I centri di due circonferenze di raggio 1 metro distano $\sqrt{3}$ metri. Considerate uno qualunque dei punti in cui le circonferenze si incontrano e, per ciascuna di esse, tracciate la retta ad essa tangente in quel punto. Quanti gradi misura il maggiore dei quattro angoli formati da queste due rette?

[0120] Le circonferenze devono necessariamente incontrarsi perché i loro centri distano meno del loro diametro. Inoltre è chiaro che la risposta è la stessa per i due punti in cui si incontrano. Siano A e B i centri delle due circonferenze e siano P e Q i due punti dove si incontrano. I triangoli PAQ e PBQ, chiaramente uguali, sono equilateri: infatti sono isosceli rispetto al lato PQ (che hanno in comune), la loro altezza rispetto a quel lato misura $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e gli altri lati sono lunghi 1. Dei quattro angoli in questione allora, due misurano 120 e due 60 gradi.

9. I mattoncini

Cecilia ha 100 mattoncini uguali: ognuno ha la forma di un parallelepipedo lungo 3 cm, largo 2 cm e alto 1 cm. Dopo che, accostandone alcuni, ha formato un cubo, quanti gliene sono rimasti?

[0064] Il volume di ogni mattoncino è 6 cm^3. Esiste un unico multiplo (intero) di 6 che è un cubo perfetto minore di 600: è $2^3 \times 3^3 = 6 \times 36$. Accostando 36 mattoncini si riesce effettivamente a costruire un cubo: basta, ad esempio, sovrapporre 6 strati di 6 mattoncini ciascuno uguali a quello in figura.



10. Cani, gatti e galline

Un prato quadrato di area 900 m^2 è recintato. Il proprietario vuole lascarvi scorrazzare alcuni cani, alcuni gatti e alcune galline, ma vuole evitare che animali di specie diverse vengano a contatto fra loro. Decide allora di suddividerlo in tre appezzamenti rettangolari tutti della stessa area, ciascuno separato dagli altri tramite una rete. Vuole ridurre al minimo la lunghezza della rete da usare (che potrà essere tagliata nel modo più opportuno). Quanti metri di rete gli basterà acquistare?

[0050] Ci sono solo due modi di ripartire un quadrato in tre rettangoli: tracciando due segmenti paralleli a due dei lati con estremi sugli altri due o tracciando uno solo di tali segmenti e un altro segmento ad esso perpendicolare e con un estremo su di esso. Questa è chiaramente la soluzione che consente di risparmiare sulla rete: dato che il lato del quadrato misura 30 metri, la condizione sull'uguaglianza delle aree dei tre rettangoli (300 m^2) impone che i due segmenti siano lunghi uno 30 metri e l'altro $30 - 10 = 20$ metri.

11. Avanti e indietro

Per allenarsi, un giorno Ernesto decide di fare un esperimento: partendo da un certo punto di una strada diritta inizia a fare un passo avanti, poi ne fa due avanti e uno indietro, poi tre avanti e due indietro, poi quattro avanti e tre indietro e così via. Un passo di Ernesto, è sempre lungo esattamente un metro. Quando raggiunge la distanza di 80 metri dal punto da cui era partito, decide di fermarsi. Quanti metri ha percorso Ernesto prima di fermarsi?

[1640] Per guadagnare il primo metro in avanti, ad Ernesto basta 1 passo; per guadagnare il secondo una volta fatto il primo e volendo poi proseguire, deve fare 2 passi avanti e 1 indietro; per guadagnare il terzo una volta fatto il secondo e volendo poi proseguire, deve fare 3 passi avanti e 2 indietro, e così via. Dopo un numero di passi uguale alla somma dei primi 39 interi positivi dispari, Ernesto sarà a 39 metri dal punto di partenza: con i successivi 40 passi avanti si porterà a 79 metri, il punto più lontano raggiunto fino ad allora, ma poi dovrà farne 39 indietro, e si ritroverà a 40 metri. Ora però potrà fare 41 passi avanti prima di fare altri passi indietro: dopo 40 si troverà a 80 metri dal punto da dove era partito. La risposta è allora data dalla somma dei primi 40 interi dispari aumentata di 40.
Nota. Dato un numero intero positivo n, la somma S_n dei primi n interi dispari si può calcolare utilizzando in modo opportuno la formula che assegna in $k(k + 1)/2$ la somma dei primi k interi positivi. Meglio, si può più brevemente osservare che, detto $2n - 1$ l'n-esimo intero dispari, S_n è il numero n^2 delle celle di una griglia $n \times n$: infatti una griglia $(n + 1) \times (n + 1)$ si può ottenere da una griglia $n \times n$ "contornandola" su due lati adiacenti, vertice incluso, con $2n + 1$ celle e $2n + 1$ è l'intero dispari successivo all'n-esimo intero dispari.

12. Il parallelepipedo

Le lunghezze dei lati di un parallelepipedo rettangolo sono espresse da numeri interi di centimetri. Le aree di due delle facce sono 24 e 30 centimetri quadrati. Quanti centimetri cubi può valere, al massimo, il volume del parallelepipedo?

[0720] Occorre massimizzare il prodotto di tre numeri interi (positivi) A, B, C tali che $A \times B = 24$ e $B \times C = 30$. È chiaro che si ottiene lo scopo minimizzando B, dunque ponendo $B = 1$ (in questo modo, infatti, ogni fattore primo comune a 24 e a 30 compare due volte nel prodotto $A \times B \times C$).

13. Un numero e il suo quadrato

Considerate il numero 999...999 nella cui scrittura compare solo la cifra 9 ripetuta 99 volte. Quanto vale la somma delle cifre del quadrato di questo numero?

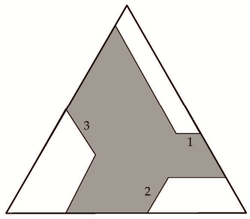
[0891] Se n è il numero assegnato, si ha $n = 10^{99} - 1$, da cui

$$n^2 = (10^{99} - 1)^2 = 10^{198} - 2 \times 10^{99} + 1 = 999...998000...001$$

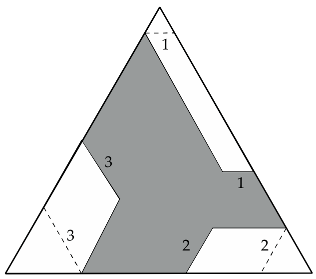
dove le cifre 9 sono 98 e altrettante sono le cifre 0. Allora la somma richiesta vale $98 \times 9 + 8 + 1$.

14. L'ennagono

Nella figura è ombreggiato un ennagono interamente contenuto in un triangolo equilatero di lato 15. Ogni lato dell'ennagono è parallelo a qualche lato del triangolo. Come indicato, tre dei suoi lati hanno misure 1, 2 e 3 (la figura non è in scala). Quanto misura il perimetro dell'ennagono?



[0039] Nelle nostre ipotesi, ognuna delle regioni rimaste bianche all'interno del triangolo equilatero è un trapezio isoscele, ottenibile unendo un parallelogramma ad un triangolo equilatero il cui lato è lungo quanto ciascuno dei lati obliqui del trapezio (v. figura). Allora il perimetro dell'ennagono è inferiore a quello del triangolo equilatero di 1 + 2 + 3.



15. La divisione per 2015

Un numero N diviso per 2015 dà resto 2. Qual è il resto della divisione di N^{11} per 2015?

[0033] Per qualche numero intero K è vero che $N = K \times 2015 + 2$. Il numero $(K \times 2015 + 2)^{11}$ è esprimibile come somma di addendi di cui uno è 2^{11} e gli altri sono tutti multipli di 2015 (si pensi allo sviluppo della potenza). Facilmente si calcola $2^{11} = 2048 = 2015 + 33$.