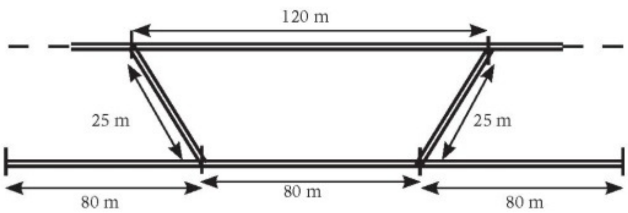
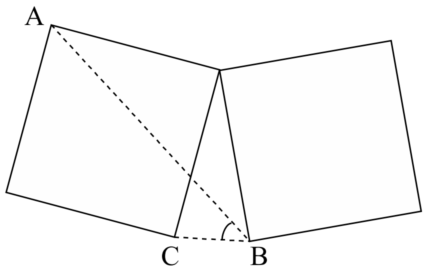
LIVELLO JUNIOR

J1. (*5 punti*) Kang è una stazione su una linea a binario unico. In figura vedi lo schema dei binari di Kang, di ciascuno dei quali è indicata la lunghezza: il binario di corsa è quello superiore, mentre il binario inferiore inizia e termina con due tronchi "morti". Tutti i treni circolanti sulla linea sono composti da una locomotiva, che è in testa, e da alcune carrozze: la lunghezza di ogni locomotiva e di ogni carrozza è 19 metri. Quali sono le condizioni meno restrittive da imporre sulla composizione di due treni perché possano incrociarsi in Kang? Tieni presente che è ammesso ogni tipo di manovra (in particolare i treni possono fare retromarcia) e di segnalamento compatibile con lo schema della stazione, incluso lo spezzamento dei treni in gruppi di carrozze.



J2. (*7 punti*) La figura mostra due quadrati uguali che hanno in comune esattamente un vertice. È possibile precisare la misura dell'angolo ABC?



J3. (*11 punti*) Negli usuali fogli (rettangolari) formato A4 il rapporto fra la lunghezza del lato più lungo e quella del lato più corto è $\sqrt{2}$.
Vuoi disegnare su uno di tali fogli una griglia di dimensioni (n + 1) × n formata da celle quadrate, non importa di quale taglia, ma la stessa per tutte le celle. Vuoi fare in modo che ogni lato della griglia sia parallelo a un bordo del foglio e che la distanza di ciascuno dei lati della griglia dal bordo del foglio più vicino sia la stessa, non importa quale, per ciascuno dei quattro lati. Quanti sono i possibili valori di n?

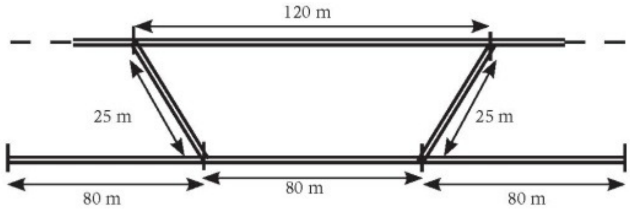
J4. (*14 punti*) A Kanglandia la moneta in uso è il kang e vi sono solo monete da 1, 2 o 3 kang. Ovviamente, con monete come queste, si può realizzare qualunque importo di un numero intero di kang. Dimostra che, per ogni numero intero positivo N, i diversi modi possibili per realizzare l'importo di N + 1 kang sono in numero strettamente superiore ai diversi modi possibili di realizzare l'importo di N kang.
Attenzione: per ottenere, ad esempio, 4 kang, il modo 1 + 1 + 2 va considerato uguale al modo 1 + 2 + 1 (ma non al modo 2 + 2).

J5. (*18 punti*) 51 corvi sono appollaiati in fila su un ramo di un grosso albero. Ogni volta (e solo ogni volta) che uno di essi gracchia, il suo vicino di destra e quello di sinistra, se esistono, si alzano in volo. Ogni corvo che prende il volo vola per esattamente un minuto, poi riprende il suo posto lanciando immediatamente una sonora gracchiata. Questa mattina il primo a gracchiare è stato il corvo all'estremità del ramo e poi hanno proseguito, secondo la regola descritta, per un'ora esatta: allo scadere dell'ora tutti i corvi in volo sono tornati sul ramo facendo ciascuno un'ultima sonora gracchiata. Quante sono state in quell'ora, dal primo all'ultimo istante inclusi, le gracchiate fatte?

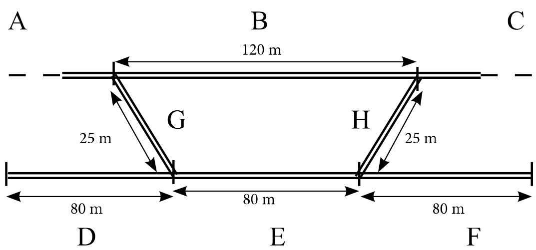
J6. (*22 punti*) Dato un triangolo, qual è il numero minimo di rette parallele ai lati che occorre tracciare per suddividerlo in esattamente 100 regioni?

LIVELLO JUNIOR

J1. (*5 punti*) Kang è una stazione su una linea a binario unico. In figura vedi lo schema dei binari di Kang, di ciascuno dei quali è indicata la lunghezza: il binario di corsa è quello superiore, mentre il binario inferiore inizia e termina con due tronchi "morti". Tutti i treni circolanti sulla linea sono composti da una locomotiva, che è in testa, e da alcune carrozze: la lunghezza di ogni locomotiva e di ogni carrozza è 19 metri. Quali sono le condizioni meno restrittive da imporre sulla composizione di due treni perché possano incrociarsi in Kang? Tieni presente che è ammesso ogni tipo di manovra (in particolare i treni possono fare retromarcia) e di segnalamento compatibile con lo schema della stazione, incluso lo spezzamento dei treni in gruppi di carrozze.



Risposta se si permette a uno solo dei due treni di effettuare manovre: che almeno uno dei due treni (che sarà quello a dover effettuare manovre) non abbia, oltre alla locomotiva, più di 13 carrozze.



Soluzione. Con il vincolo dato, perché due treni si possano incrociare, occorre che rimanga libero un itinerario di "corsa": dei due possibili (ABC e AGEHC) conviene che rimanga libero il più breve, dunque ABC. La somma delle lunghezze dei tratti di binario fuori dal binario di corsa ABC è 290 = 15 × 19 + 5 metri, ma i tratti G e H singolarmente considerati non possono ospitare più di un pezzo ciascuno, né possono aumentare di più di un pezzo la capienza di tratti adiacenti (ad esempio, il tratto GEF, uno dei due più lunghi utilizzabili, può ospitare solo 9 pezzi): allora almeno 12 metri vanno persi e dunque la composizione di almeno uno dei due treni non deve superare i 14 pezzi. Indichiamo una sequenza di manovre che consente di ricoverare un treno da 14 pezzi, supponendo (ad esempio) che questo treno arrivi da sinistra (stante la simmetria dello schema della stazione, se il treno arriva da destra è applicabile la sequenza simmetrica). Durante tutte queste manovre l'altro treno (che arriva da destra e può essere lungo quanto si vuole) deve essere tenuto a distanza sufficiente da consentirle.

- Provenendo da A, il treno oltrepassa il tratto B portando in C l'ultima carrozza;
- in retromarcia, lungo H e E, lascia le ultime 4 carrozze in D;

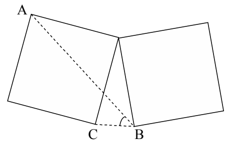
- rifacendo in verso opposto questo percorso, lascia la quint'ultima carrozza in H;
- esce da H in C e in retromarcia, lungo B, riporta la locomotiva in A;
- lungo G e E, rimasti liberi, ricovera i suoi 9 pezzi rimanenti in G, E e F.

Risposta se si ammette che entrambi i treni possano "collaborare" eseguendo manovre entrambi: non occorre imporre limitazioni sulla composizione dei treni.
Soluzione (fornita da alcuni concorrenti). Con riferimento alla figura, basta che i treni eseguano le seguenti manovre.
- Il treno che proviene da sinistra (brevemente "treno S") tiene solo le prime cinque carrozze, sganciando le rimanenti in A a una distanza dalla stazione superiore alla lunghezza del treno che proviene da destra (brevemente "treno D"), e si porta con questa composizione ridotta nell'itinerario GEH;
- il treno D avanza fino ad avere l'ultima carrozza in A (gli è stato lasciato lo spazio);
- il treno S ridotto a cinque carrozze va in C e, in retromarcia, aggancia le sue carrozze in coda al treno D (occupando parzialmente B);
- la locomotiva del treno S si riporta in G via HE;
- il treno D indietreggia fino ad avere la locomotiva in B;
- la locomotiva di S torna in A a riprendere 5 delle rimanenti carrozze di S e si porta con esse in GEH;
- il treno D con le cinque carrozze di S si riporta tutto in A (lo spazio c'è, perchè il numero di carrozze rimane invariato rispetto al passo precedente) e si ripete la sequenza fino ad esaurire le carrozze di S;
- il treno D sgancia le carrozze di S e riparte (verso sinistra);
- la locomotiva di S riaggancia le sue carrozze (che non sono più nell'ordine iniziale) e riparte (verso destra).

A gara ultimata, il concorrente del livello Cadet Lorenzo Pierro (lo ringraziamo vivamente) ha presentato la seguente modifica alla soluzione precedente, che evita di far agganciare anche solo temporaneamente le carrozze del treno S al treno D, consentendo dunque ad ogni treno di operare con la sola propria locomotiva.
- Il treno S porta le sue prime 5 carrozze in GEH, lasciando le rimanenti a una distanza dalla stazione sufficiente perché possano essere attuate le manovre che seguono;
- il treno D avanza fino ad avere l'ultima carrozza in A;
- la locomotiva di S, via CBA, si porta all'altra estremità delle sue cinque carrozze, le spinge sufficientemente avanti in C e ritorna in G via HE;
- il treno D retrocede tutto in BC;
- la locomotiva di S aggancia altre cinque delle sue rimanenti carrozze e le porta in GEH.
A questo punto il treno D avanza nuovamente fino ad avere l'ultima carrozza in A e si riprende il ciclo precedente fino ad esaurire le carrozze di S. Al termine di queste operazioni, il treno S si troverà tutto in C alla destra del treno D. Entrambi potranno ripartire, D verso sinistra e S verso destra, ma S avrà la locomotiva in coda: volendo riportarla in testa sarà sufficiente che la locomotiva, usando l'itinerario HEG dove

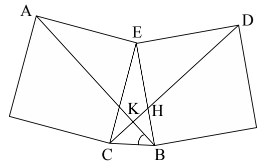
depositerà cinque carrozze alla volta, si intercali ogni cinque carrozze, depositando in A quelle già alla sua sinistra.

J2. (*7 punti*) La figura mostra due quadrati uguali che hanno in comune esattamente un vertice. È possibile precisare la misura dell'angolo ABC?



Risposta: sì, misura 45 gradi.

Soluzione. Con riferimento alla figura, i segmenti AB e DC sono perpendicolari: infatti gli angoli ABE e EDC sono uguali, dunque i triangoli HKB e DEH sono simili, con il secondo rettangolo in E e dunque il primo rettangolo in K. Ne segue che il triangolo (chiaramente) isoscele BKC è rettangolo in K.



<u>In alternativa</u>: dette x e y le misure (in gradi) rispettivamente degli angoli ABC (= DCB) e EBA, la misura dell'angolo CEB è espressa sia da 180 - 2(x + y) sia da 90 - 2y (infatti l'angolo AEB misura 180 - 2y). Ne segue 2x = 90.

<u>In alternativa</u>: i triangoli AEB e CED (isosceli e congruenti) si ottengono uno dall' altro per rotazione di 90 gradi attorno a E (ad esempio CED si ottiene ruotando EB in senso antiorario fino a sovrapporlo a ED). Ne segue che il triangolo isoscele BKC è rettangolo in K.

J3. (*11 punti*) Negli usuali fogli (rettangolari) formato A4 il rapporto fra la lunghezza del lato più lungo e quella del lato più corto è $\sqrt{2}$. Vuoi disegnare su uno di tali fogli una griglia di dimensioni (n + 1) × n formata da celle quadrate, non importa di quale taglia, ma la stessa per tutte le celle. Vuoi fare in modo che ogni lato della griglia sia parallelo a un bordo del foglio e che la distanza di ciascuno dei lati della griglia dal bordo del foglio più vicino sia la stessa, non importa quale, per ciascuno dei quattro lati. Quanti sono i possibili valori di n?

Risposta: solo 1 e 2.

Soluzione. Senza ledere la generalità possiamo assumere che le lunghezze dei lati del foglio siano 1 e $\sqrt{2}$. Sia x la lunghezza del lato delle celle quadrate e y la distanza da tenere dai bordi. Deve essere $2y + nx = 1$ e $2y + (n + 1)x = \sqrt{2}$, da cui $x = \sqrt{2} - 1$. Inserendo questo valore nella prima delle due uguaglianze, si ricava $y = (n + 1 - \sqrt{2}\,n)/2$. Questa quantità è sicuramente positiva per n = 1 e per n = 2, mentre per valori interi di n > 2 è certamente negativa, contro l'ipotesi che y sia una distanza.

J4. (*14 punti*) A Kanglandia la moneta in uso è il kang e vi sono solo monete da 1, 2 o 3 kang. Ovviamente, con monete come queste, si può realizzare qualunque importo di un numero intero di kang. Dimostra che, per ogni numero intero positivo N, i diversi modi possibili per realizzare l'importo di N + 1 kang sono in numero strettamente superiore ai diversi modi possibili di realizzare l'importo di N kang.
Attenzione: per ottenere, ad esempio, 4 kang, il modo 1 + 1 + 2 va considerato uguale al modo 1 + 2 + 1 (ma non al modo 2 + 2).

Soluzione.
I modi di totalizzare N + 1 kang sono almeno tanti quanti quelli di totalizzare N kang: basta aggiungere un moneta di 1 kang ad ognuno di questi ultimi. Allora è sufficiente mostrare che esiste almeno un modo di totalizzare N + 1 kang senza usare monete da 1 kang: se N + 1 è pari si possono usare solo monete da 2 kang; se N + 1 è dispari, è almeno 3, dunque è sufficiente usare una moneta da 3 kang e solo monete da 2 kang (se N > 2).

J5. (*18 punti*) 51 corvi sono appollaiati in fila su un ramo di un grosso albero. Ogni volta (e solo ogni volta) che uno di essi gracchia, il suo vicino di destra e quello di sinistra, se esistono, si alzano in volo. Ogni corvo che prende il volo vola per esattamente un minuto, poi riprende il suo posto lanciando immediatamente una sonora gracchiata. Questa mattina il primo a gracchiare è stato il corvo all'estremità del ramo e poi hanno proseguito, secondo la regola descritta, per un'ora esatta: allo scadere dell'ora tutti i corvi in volo sono tornati sul ramo facendo ciascuno un'ultima sonora gracchiata. Quante sono state in quell'ora, dal primo all'ultimo istante inclusi, le gracchiate fatte?

Risposta: 931.
Soluzione. Quando gracchia il primo corvo, se ne alza in volo solo 1, quello di posizione 2; quando questo atterra sul ramo si alzano il primo e il terzo, quando atterrano questi il secondo e il quarto, quando atterrano il 2 e il 4 se ne alzano 3, (di posti 1,3,5) e quando questi si posano di nuovo 3 (di posti 2,4,6) e così via fin quando posandosi i 25 di posto pari, non si alzano per la prima volta tutti i 26 di posto dispari. Per far questo occorrono $1 + 2 \times 24 = 49$ minuti e le gracchiate fino a questo punto sono state $2 \times \sum_1^{25} k = 25 \times 26$. Da questo momento si alzano e si posano alternatamente tutti i corvi di posto pari e tutti quelli di posto dispari, precisamente al 50-mo minuto si posano 26 corvi, al 51-esimo 25, ecc. per finire con 26 al 60-mo minuto, gracchiando in totale $26 + (25 + 26) \times 5$. In totale $26^2 + 255 = 931$.

J6. (*22 punti*) Dato un triangolo, qual è il numero minimo di rette parallele ai lati che occorre tracciare per suddividerlo in esattamente 100 regioni?

Risposta: 16.

Soluzione. Detti i, j, k i numeri delle rette parallele a ciascuno dei tre lati tracciate, osserviamo che, per dividere il triangolo nel maggior numero di parti con i, j, k fissati occorre e basta che le tutte le i e j rette parallele ai primi due lati si intersechino all'interno del triangolo e che ciascuna delle k rette parallele al terzo lato intersechi in punti distinti del triangolo ciascuna delle altre i + j rette. In tal caso il triangolo viene diviso in $(i + 1)(j + 1) + k(i + j + 1)$ parti; dobbiamo quindi avere
$(i + 1)(j + 1) + k(i + j + 1) \geq 100$ cioè $ij + k(i + j) + i + j + k \geq 99$.
Questo è possibile ad esempio con la terna (5,5,6), che dà $(i + 1)(j + 1) + k(i + j + 1) = 102$ (o anche con le terne (6,6,4) e (7,5,4) che danno rispettivamente 101 e 100).
Incominciamo con il dimostrare che se $i + j + k < 16$ la disuguaglianza non può mai essere verificata. Supponiamo che $i + j + k = 15$; l'esame di questo caso mostra anche che si possono escludere i casi $i + j + k < 15$. Riscriviamo la nostra disuguaglianza come $ij + k(15 - k) \geq 84$; per motivi di simmetria tra k e 15 - k consideriamo solo k = 0,1,...,7: il massimo del valore di $ij + k(15 - k)$ si ottiene, per ogni k fissato, per la coppia i,j di valori più vicini a $\frac{15-k}{2}$, e vale rispettivamente 56, 63, 68, 72, 74, 75, 74, 72.

Ora vogliamo ottenere una partizione in esattamente 100 parti. Se abbiamo scelto la terna (7,5,4) siamo già a posto. Supponiamo invece di aver scelto la terna (5,5,6) che per $i + j + k = 16$ dà il valore massimo. Disegniamo un triangolo con un lato (base) orizzontale e 5 + 5 rette parallele ai due lati obliqui del triangolo, che si intersechino come richiesto dividendo il triangolo in 36 parti: possiamo supporre, senza causare restrizioni, che i punti di intersezione delle rette con i lati siano alla stessa quota sui due lati. Consideriamo il segmento parallelo alla base che congiunge i punti A e B in figura: ogni retta parallela alla base che attraversi il triangolo sotto il segmento AB interseca tutte le 10 rette e quindi, se non passa per un loro punto di intersezione (poiché i punti di intersezione sono un numero finito esistono infinite rette con tale proprietà), divide ognuna delle 11 regioni che attraversa in due parti, aumentando quindi di 11 il numero delle parti: con 5 rette di tal tipo siamo a 91 parti. Ora (v. figura) tracciamo una retta parallela alla base che stia sopra ad AB ma sotto a CD, e che non incontri punti di intersezione: questa incontra solo 8 rette, spezzando in due 9 regioni e ci fa quindi arrivare esattamente a 100 parti.