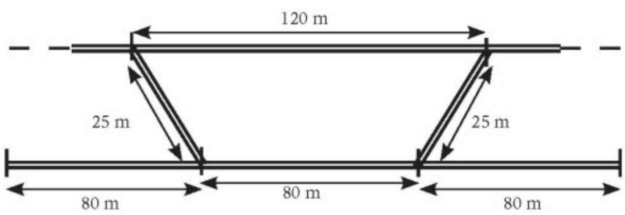
LIVELLO BENJAMIN

B1. (*5 punti*) In un dado regolare la somma dei punti riportati su due facce opposte è sempre 7. Amedeo dice di aver costruito un dado non regolare per il quale si verificano tutti i seguenti tre fatti:
- vi sono facce con un numero dispari di punti;
- la somma dei punti riportati su due facce opposte è 7 se su una delle due compare un numero dispari di punti;
- la somma dei punti riportati su due facce opposte è 8 se su una delle due facce compare un numero pari di punti.

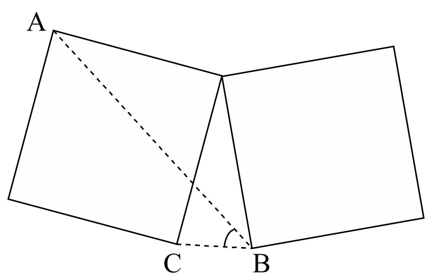
Anna non gli crede. Se pensi che abbia ragione Amedeo, indica uno dei dadi che potrebbe avere costruito; se pensi che faccia bene Anna a non credergli, spiega il motivo.

B2. (*7 punti*) Sandro e Paolo fanno il seguente gioco. Ci sono 8 gettoni sul tavolo: si gioca a turno e, quando è il proprio turno, si possono levare 1, 2 o 3 gettoni: vince l'ultimo che riesce a prendere qualche gettone. Sandro vuole vincere a tutti i costi: gli conviene giocare per primo o lasciare che ad iniziare sia Paolo?

B3. (*11 punti*) Kang è una stazione su una linea a binario unico. In figura vedi lo schema dei binari di Kang, di ciascuno dei quali è indicata la lunghezza: il binario di corsa è quello superiore, mentre il binario inferiore inizia e termina con due tronchi "morti". Tutti i treni circolanti sulla linea sono composti da una locomotiva, che è in testa, e da alcune carrozze: la lunghezza di ogni locomotiva e di ogni carrozza è 19 metri. Quali sono le condizioni meno restrittive da imporre sulla composizione di due treni perché possano incrociarsi in Kang? Tieni presente che è ammesso ogni tipo di manovra (in particolare i treni possono fare retromarcia) e di segnalamento compatibile con lo schema della stazione, incluso lo spezzamento dei treni in gruppi di carrozze.



B4. (*14 punti*) La figura mostra due quadrati uguali che hanno in comune esattamente un vertice. È possibile precisare la misura dell'angolo ABC?



B5. (*18 punti*) 51 cornacchie sono allineate su un cavo elettrico sospeso. Quando (e solo quando) una di esse gracchia, la sua vicina di destra e quella di sinistra (o solo una delle due, nel caso la cornacchia sia ad una delle due estremità) prendono il volo e dopo un minuto esatto si rimettono al posto dove erano e gracchiano a loro volta. Inizia a gracchiare la prima cornacchia della fila. Dopo un'ora esatta da questa prima gracchiata, quante volte avrà gracchiato l'ultima cornacchia?

B6. (*22 punti*) A Kanglandia la moneta in uso è il kang e vi sono solo monete da 1, 2 o 3 kang. Ovviamente, con monete come queste, si può realizzare qualunque importo di un numero intero di kang. Dimostra dapprima che, per ogni numero intero positivo N, i diversi modi possibili per realizzare l'importo di N + 1 kang sono in numero non inferiore ai diversi modi possibili di realizzare l'importo di N kang. Dimostra quindi che, di fatto, i primi sono sempre in numero strettamente superiore ai secondi.
(Attenzione: per ottenere, ad esempio, 4 kang, il modo 1 + 1 + 2 va considerato uguale al modo 1 + 2 + 1, ma non al modo 2 + 2.)

LIVELLO BENJAMIN

B1. (*5 punti*) In un dado regolare la somma dei punti riportati su due facce opposte è sempre 7. Amedeo dice di aver costruito un dado non regolare per il quale si verificano tutti i seguenti tre fatti:
- vi sono facce con un numero dispari di punti;
- la somma dei punti riportati su due facce opposte è 7 se su una delle due compare un numero dispari di punti;
- la somma dei punti riportati su due facce opposte è 8 se su una delle due facce compare un numero pari di punti.

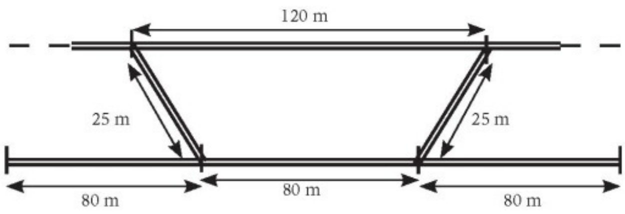
Anna non gli crede. Se pensi che abbia ragione Amedeo, indica uno dei dadi che potrebbe avere costruito; se pensi che faccia bene Anna a non credergli, spiega il motivo.

Risposta: ha ragione Anna.
Soluzione. Su almeno una faccia è presente un numero dispari di punti: allora il numero di punti riportato sulla faccia opposta deve essere pari (altrimenti la somma dei due numeri non potrebbe essere 7). La terza condizione, però, impone che in questo caso la somma dei numeri presenti sulle stesse due facce sia 8: impossibile.

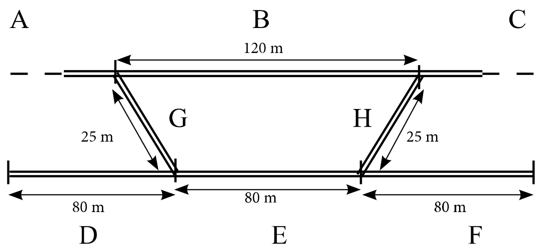
B2. (*7 punti*) Sandro e Paolo fanno il seguente gioco. Ci sono 8 gettoni sul tavolo: si gioca a turno e, quando è il proprio turno, si possono levare 1, 2 o 3 gettoni: vince l'ultimo che riesce a prendere qualche gettone. Sandro vuole vincere a tutti i costi: gli conviene giocare per primo o lasciare che ad iniziare sia Paolo?

Risposta: lasciare che ad iniziare sia Paolo.
Soluzione. Il secondo che gioca può prendere 1, 2 o 3 gettoni a seconda che il primo ne abbia appena presi rispettivamente 3, 2 o 1: in questo modo rimangono sul tavolo 4 gettoni e si può ripetere la strategia.

B3. (*11 punti*) Kang è una stazione su una linea a binario unico. In figura vedi lo schema dei binari di Kang, di ciascuno dei quali è indicata la lunghezza: il binario di corsa è quello superiore, mentre il binario inferiore inizia e termina con due tronchi "morti". Tutti i treni circolanti sulla linea sono composti da una locomotiva, che è in testa, e da alcune carrozze: la lunghezza di ogni locomotiva e di ogni carrozza è 19 metri. Quali sono le condizioni meno restrittive da imporre sulla composizione di due treni perché possano incrociarsi in Kang? Tieni presente che è ammesso ogni tipo di manovra (in particolare i treni possono fare retromarcia) e di segnalamento compatibile con lo schema della stazione, incluso lo spezzamento dei treni in gruppi di carrozze.



Risposta se si permette a uno solo dei due treni di effettuare manovre: che almeno uno dei due treni (che sarà quello a dover effettuare manovre) non abbia, oltre alla locomotiva, più di 13 carrozze.



Soluzione. Con il vincolo dato, perché due treni si possano incrociare, occorre che rimanga libero un itinerario di "corsa": dei due possibili (ABC e AGEHC) conviene che rimanga libero il più breve, dunque ABC. La somma delle lunghezze dei tratti di binario fuori dal binario di corsa ABC è 290 = 15 × 19 + 5 metri, ma i tratti G e H singolarmente considerati non possono ospitare più di un pezzo ciascuno, né possono aumentare di più di un pezzo la capienza di tratti adiacenti (ad esempio, il tratto GEF, uno dei due più lunghi utilizzabili, può ospitare solo 9 pezzi): allora almeno 12 metri vanno persi e dunque la composizione di almeno uno dei due treni non deve superare i 14 pezzi. Indichiamo una sequenza di manovre che consente di ricoverare un treno da 14 pezzi, supponendo (ad esempio) che questo treno arrivi da sinistra (stante la simmetria dello schema della stazione, se il treno arriva da destra è applicabile la sequenza simmetrica). Durante tutte queste manovre l'altro treno (che arriva da destra e può essere lungo quanto si vuole) deve essere tenuto a distanza sufficiente da consentirle.

- Provenendo da A, il treno oltrepassa il tratto B portando in C l'ultima carrozza;
- in retromarcia, lungo H e E, lascia le ultime 4 carrozze in D;
- rifacendo in verso opposto questo percorso, lascia la quint'ultima carrozza in H;
- esce da H in C e in retromarcia, lungo B, riporta la locomotiva in A;
- lungo G e E, rimasti liberi, ricovera i suoi 9 pezzi rimanenti in G, E e F.

Risposta se si ammette che entrambi i treni possano "collaborare" eseguendo manovre entrambi: non occorre imporre limitazioni sulla composizione dei treni.

Soluzione (fornita da alcuni concorrenti). Con riferimento alla figura, basta che i treni eseguano le seguenti manovre.

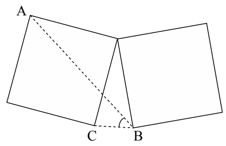
- Il treno che proviene da sinistra (brevemente "treno S") tiene solo le prime cinque carrozze, sganciando le rimanenti in A a una distanza dalla stazione superiore alla lunghezza del treno che proviene da destra (brevemente "treno D"), e si porta con questa composizione ridotta nell'itinerario GEH;
- il treno D avanza fino ad avere l'ultima carrozza in A (gli è stato lasciato lo spazio);
- il treno S ridotto a cinque carrozze va in C e, in retromarcia, aggancia le sue carrozze in coda al treno D (occupando parzialmente B);
- la locomotiva del treno S si riporta in G via HE;
- il treno D indietreggia fino ad avere la locomotiva in B;
- la locomotiva di S torna in A a riprendere 5 delle rimanenti carrozze di S e si porta con esse in GEH;
- il treno D con le cinque carrozze di S si riporta tutto in A (lo spazio c'è, perchè il numero di carrozze rimane invariato rispetto al passo precedente) e si ripete la sequenza fino ad esaurire le carrozze di S;
- il treno D sgancia le carrozze di S e riparte (verso sinistra);
- la locomotiva di S riaggancia le sue carrozze (che non sono più nell'ordine iniziale) e riparte (verso destra).

A gara ultimata, il concorrente del livello Cadet Lorenzo Pierro (lo ringraziamo vivamente) ha presentato la seguente modifica alla soluzione precedente, che evita di far agganciare anche solo temporaneamente le carrozze del treno S al treno D, consentendo dunque ad ogni treno di operare con la sola propria locomotiva.

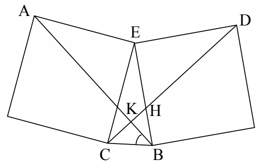
- Il treno S porta le sue prime 5 carrozze in GEH, lasciando le rimanenti a una distanza dalla stazione sufficiente perché possano essere attuate le manovre che seguono;
- il treno D avanza fino ad avere l'ultima carrozza in A;
- la locomotiva di S, via CBA, si porta all'altra estremità delle sue cinque carrozze, le spinge sufficientemente avanti in C e ritorna in G via HE;
- il treno D retrocede tutto in BC;
- la locomotiva di S aggancia altre cinque delle sue rimanenti carrozze e le porta in GEH.

A questo punto il treno D avanza nuovamente fino ad avere l'ultima carrozza in A e si riprende il ciclo precedente fino ad esaurire le carrozze di S. Al termine di queste operazioni, il treno S si troverà tutto in C alla destra del treno D. Entrambi potranno ripartire, D verso sinistra e S verso destra, ma S avrà la locomotiva in coda: volendo riportarla in testa sarà sufficiente che la locomotiva, usando l'itinerario HEG dove depositerà cinque carrozze alla volta, si intercali ogni cinque carrozze, depositando in A quelle già alla sua sinistra.

B4. (*14 punti*) La figura mostra due quadrati uguali che hanno in comune esattamente un vertice. È possibile precisare la misura dell'angolo ABC?



Risposta: sì, misura 45 gradi.
Soluzione. Con riferimento alla figura (in cui i triangoli AEB e CEB sono ovviamente isosceli), dette x e y le misure (in gradi) rispettivamente degli angoli ABC (= DCB) e EBA, la misura dell'angolo CEB è espressa sia da 180 - 2(x + y) sia da 90 - 2y (infatti l'angolo AEB misura 180 - 2y). Ne segue 2x = 90.



B5. (*18 punti*) 51 cornacchie sono allineate su un cavo elettrico sospeso. Quando (e solo quando) una di esse gracchia, la sua vicina di destra e quella di sinistra (o solo una delle due, nel caso la cornacchia sia ad una delle due estremità) prendono il volo e dopo un minuto esatto si rimettono al posto dove erano e gracchiano a loro volta. Inizia a gracchiare la prima cornacchia della fila. Dopo un'ora esatta da questa prima gracchiata, quante volte avrà gracchiato l'ultima cornacchia?

Risposta: 6.
Soluzione. Passato un minuto da quando la prima cornacchia ha gracchiato, la seconda ritorna e gracchia, facendo partire la terza (e la prima) e così via. Allora l'ultima delle 51 cornacchie gracchia per la prima volta 50 minuti dopo che ha gracchiato la prima: a quel punto parte la penultima che gracchierà (al suo ritorno) dopo 1 minuto, facendo ripartire l'ultima, che dunque gracchierà (al suo secondo ritorno) dopo un altro minuto per la seconda volta. Gracchierà ancora dopo 2 minuti per la terza volta e dunque dopo altri 6 minuti, a un'ora esatta da quando la prima ha gracchiato per la prima volta, avrà gracchiato complessivamente 6 volte.

B6. (*22 punti*) A Kanglandia la moneta in uso è il kang e vi sono solo monete da 1, 2 o 3 kang. Ovviamente, con monete come queste, si può realizzare qualunque importo di un numero intero di kang. Dimostra dapprima che, per ogni numero intero positivo N, i diversi modi possibili per realizzare l'importo di N + 1 kang sono in numero non inferiore ai diversi modi possibili di realizzare l'importo di N kang. Dimostra quindi che, di fatto, i primi sono sempre in numero strettamente superiore ai secondi.
(Attenzione: per ottenere, ad esempio, 4 kang, il modo 1 + 1 + 2 va considerato uguale al modo 1 + 2 + 1, ma non al modo 2 + 2.)

Soluzione.
I modi di totalizzare N + 1 kang sono almeno tanti quanti quelli di totalizzare N kang: basta aggiungere un moneta di 1 kang ad ognuno di questi ultimi. Allora è sufficiente mostrare che esiste almeno un modo di totalizzare N + 1 kang senza usare monete da 1 kang: se N + 1 è pari si possono usare solo monete da 2 kang; se N + 1 è dispari, è almeno 3, dunque è sufficiente usare una moneta da 3 kang e solo monete da 2 kang (se N > 2).