

Kangourou della Matematica 2014
Coppa a squadre Kangourou - finale
Cervia, 11 maggio 2014



Quesiti

1. Un numero primo

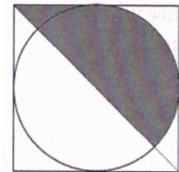
Qual è il più grande numero primo minore di 30 che può essere espresso come somma di due numeri primi?

2. La calcolatrice

Elena ha una calcolatrice con 15 tasti: 10 sono bianchi e riportano ciascuno una delle 10 cifre (tutte le cifre vi compaiono), 5 sono neri e riportano ciascuno uno dei 5 simboli “più, meno, per, diviso, uguale” (tutti questi simboli vi compaiono). Per ottenere il risultato del prodotto “2 per 3 per 15” occorre premere i sette tasti (non necessariamente diversi fra loro) 2, ×, 3, ×, 1, 5, =, dopo di che sullo schermo appare il numero 90. Come risultato di un altro prodotto, dopo aver premuto sei tasti Elena ha ottenuto sullo schermo il numero 2014. Qual è la somma delle cifre riportate sui tasti bianchi battuti questa volta da Elena?

3. Cerchio e quadrato

Osservate la figura. Un cerchio è inscritto in un quadrato di lato 8 metri. Qual è l'area, in metri quadrati, della regione ombreggiata? (Scrivete il numero intero più vicino al risultato esatto.)



4. Somma di quadrati

Sapete che due numeri interi **relativi** a e b sono tali che $a^2 + b^2 = 100$ e che la loro somma è il più piccolo numero positivo compatibile con questo presupposto. Quanto vale la loro somma?

5. Le biglie indistinguibili

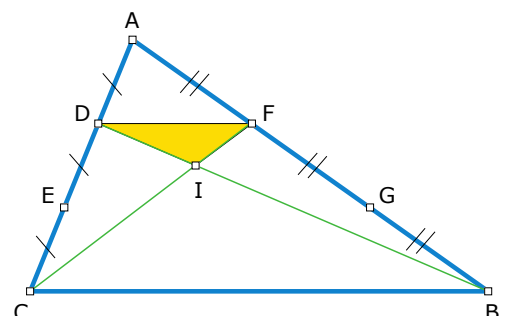
In un'urna ci sono n biglie che appaiono identiche. In realtà $n - 1$ di esse hanno anche lo stesso peso, mentre la rimanente è leggermente più pesante delle altre. Clara ha una bilancia di precisione a due piatti (che cioè permette solo di confrontare i pesi di due gruppi di oggetti, posti uno su un piatto e uno sull'altro): con al massimo due pesate è in grado di individuare la biglia più pesante. Qual è il massimo valore possibile per n ?

6. Né per 2 né per 5

Quanti sono i numeri interi compresi fra 1 e 10.000 (inclusi) che non sono divisibili né per 2 né per 5?

7. Due triangoli

Nel triangolo ABC in figura i segmenti AD , DE e EC hanno la stessa lunghezza; anche i segmenti AF , FG e GB hanno la stessa lunghezza. Il triangolo DFI ha area 10. Quanto vale l'area del triangolo ABC ?



8. Elena e sua madre

Elena e sua madre sono nate entrambe il primo gennaio. In quest'anno 2014, per ognuna di loro il numero che esprime l'età in anni coincide con la somma delle cifre dei rispettivi anni di nascita. Quanti anni aveva la madre di Elena quando è nata Elena?

9. 2014 volte 2014

La scrittura del numero $N = 20142014\dots2014$ è ottenuta scrivendo 2014 consecutivamente 2014 volte. Qual è il più piccolo numero intero n maggiore o uguale a 2 tale che N sia la somma di n numeri interi positivi consecutivi?

10. Somma di potenze

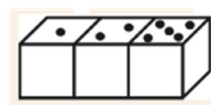
Tre numeri interi positivi a, b, c tutti diversi fra loro sono tali che il loro prodotto è 16. Qual è il massimo valore possibile per l'espressione $a^b - b^c + c^a$?

11. 2014!

Indichiamo con $2014!$ il prodotto $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2012 \times 2013 \times 2014$ dei primi 2014 interi positivi. Considerate tutte le coppie (a, b) di interi positivi tali che $2014!$ sia divisibile per $2^a \times 19^b$. Qual è il valore più alto possibile per la somma $a + b$?

12. I dadi

Accostate tre dadi facendo in modo che le facce combacianti di due dadi riportino gli stessi punti. Quanti sono, al variare degli allineamenti dei tre dadi compatibili con questa richiesta, i numeri di tre cifre tra loro diversi che possono venire indicati dalle facce superiori dei tre dadi? (I numeri vanno letti come d'uso da sinistra a destra: nell'esempio in figura il numero letto è 125. Tenete presente che le facce di un dado regolare sono numerate mediante punti da uno a sei e che la somma dei punti su due facce opposte qualunque è 7.)



13. La griglia

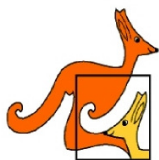
In ogni cella di una griglia 3×3 va inserito un numero intero positivo (celle diverse possono ospitare lo stesso numero) in modo che, sommando i numeri inseriti sia per righe sia per colonne, si ottengano sei risultati tutti diversi fra loro. Qual è il valore più basso possibile per la somma di tutti i numeri inseriti?

14. Numeri palindromi

Un numero intero si dice palindromo se le sue cifre, lette da sinistra a destra o da destra a sinistra, forniscono lo stesso risultato (ad esempio, 575 è palindromo, 576 non lo è). Quanti sono i numeri palindromi di 7 cifre?

15. Quadrati pari e quadrati dispari

Sia D la somma dei quadrati di tutti i numeri interi dispari compresi fra 1 e 99 inclusi. Sia P la somma dei quadrati di tutti i numeri interi pari compresi fra 2 e 100 inclusi. Quanto vale $P - D$?



Kangourou della Matematica 2014
Coppa a squadre Kangourou - finale
Cervia, 11 maggio 2014



Quesiti e soluzioni

1. Un numero primo

Qual è il più grande numero primo minore di 30 che può essere espresso come somma di due numeri primi?

[0019] Poiché l'unico primo pari è 2, devo trovare la coppia di numeri primi a distanza 2 più grandi tra quelli minori di 30: $17+2=19$

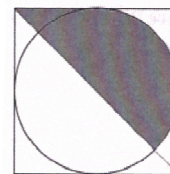
2. La calcolatrice

Elena ha una calcolatrice con 15 tasti: 10 sono bianchi e riportano ciascuno una delle 10 cifre (tutte le cifre vi compaiono), 5 sono neri e riportano ciascuno uno dei 5 simboli “più, meno, per, diviso, uguale” (tutti questi simboli vi compaiono). Per ottenere il risultato del prodotto “2 per 3 per 15” occorre premere i sette tasti (non necessariamente diversi fra loro) 2, ×, 3, ×, 1, 5, =, dopo di che sullo schermo appare il numero 90. Come risultato di un altro prodotto, dopo aver premuto sei tasti Elena ha ottenuto sullo schermo il numero 2014. Qual è la somma delle cifre riportate sui tasti bianchi battuti questa volta da Elena?

[0019] E' facile vedere che, battendo solo sei tasti, non si può ottenere 2014 come somma, differenza o quoziente; i fattori primi di 2014 sono 2, 19 e 53 e l' unico prodotto scrivibile battendo sei tasti è $38 \times 53 =$.

3. Cerchio e quadrato

Osservate la figura. Un cerchio è inscritto in un quadrato di lato 8 metri. Qual è l'area, in metri quadrati, della regione ombreggiata? (Scrivete il numero intero più vicino al risultato esatto.)



[0027] La regione ombreggiata è l'unione, senza sovrapposizioni, di un triangolo rettangolo isoscele con cateto di 4 m. e di $3/8$ di cerchio, quindi l' area è $8 + 6\pi$.

4. Somma di quadrati

Sapete che due numeri interi **relativi** a e b sono tali che $a^2 + b^2 = 100$ e che la loro somma è il più piccolo numero positivo compatibile con questo presupposto. Quanto vale la loro somma?

[0002] Deve essere $a^2=36$ e $b^2=64$ (o viceversa), quindi $a = \pm 6$ e $b = \pm 8$.

5. Le biglie indistinguibili

In un'urna ci sono n biglie che appaiono identiche. In realtà $n - 1$ di esse hanno anche lo stesso peso, mentre la rimanente è leggermente più pesante delle altre. Clara ha una bilancia di precisione a due piatti (che cioè permette solo di confrontare i pesi di due gruppi di oggetti, posti uno su un piatto e uno sull'altro): con al massimo due pesate è in grado di individuare la biglia più pesante. Qual è il massimo valore possibile per n ?

[0009] Dividiamo le biglie in tre gruppi con lo stesso numero di biglie: pesandone due, individuiamo quello dei tre che contiene la biglia più pesante; ora ripetiamo il procedimento su questo: possiamo individuare la biglia più pesante se e solo se nella seconda pesata abbiamo in tutto 3 biglie, e quindi 9 nella prima.

6. Né per 2 né per 5

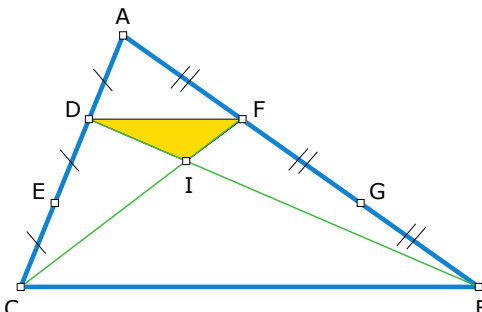
Quanti sono i numeri interi compresi fra 1 e 10.000 (inclusi) che non sono divisibili né per 2 né per 5?

[4000] Occorre togliere tutti i pari (5000) e i multipli dispari di 5 (1000).

7. Due triangoli

Nel triangolo ABC in figura i segmenti AD , DE e EC hanno la stessa lunghezza; anche i segmenti AF , FG e GB hanno la stessa lunghezza. Il triangolo DFI ha area 10. Quanto vale l'area del triangolo ABC ?

[0180] I triangoli DFI e CIB sono simili con rapporto di similitudine $1/3$; la somma delle loro altezze è $2/3$ dell'altezza h di ABC relativa alla base BC (b), quindi l'altezza h' di DFI relativa alla base DF (b') è $1/6$ di h . Si ha $b \times h/2 = 3b' \times 6h'/2 = 180$



8. Elena e sua madre

Elena e sua madre sono nate entrambe il primo gennaio. In quest'anno 2014, per ognuna di loro il numero che esprime l'età in anni coincide con la somma delle cifre dei rispettivi anni di nascita. Quanti anni aveva la madre di Elena quando è nata Elena?

[0018] Dobbiamo cercare anni $xyzw$ tali che $2014 - xyzw = x + y + z + w$; dopo il 2000 c'è solo il 2006; prima del 2000 osserviamo che il 1999 dà come somma 28 per un'età di 15 anni e negli anni '90 non potremo trovare soluzioni perché la somma delle cifre e l'età hanno parità diverse. Passando al 1989, ho rispettivamente 27 e 25, quindi il 1988 dà 26 e 26. Osserviamo che ogni anno del secolo scorso precedente il 1988 ha somma delle cifre ≤ 26 , mentre l'età di chi è nato in quegli anni è > 26 .

Quindi Elena è nata nel 2006 e sua madre nel 1988.

9. 2014 volte 2014

La scrittura del numero $N = 20142014\dots2014$ è ottenuta scrivendo 2014 consecutivamente 2014 volte. Qual è il più piccolo numero intero n maggiore o uguale a 2 tale che N sia la somma di n numeri interi positivi consecutivi?

[0004] Infatti

- n non può essere 2: la somma di due interi consecutivi è dispari e N è pari.
- n non può essere 3: la somma di tre interi consecutivi $(p - 1) + p + (p + 1) = 3p$ è divisibile per 3, mentre N non lo è (la somma delle cifre di N è 7×2014 non divisibile per 3).
- n può essere 4, poiché $(p - 1) + p + (p + 1) + (p + 2) = 4p + 2$, come N , diviso per 4 dà resto 2.

10. Somma di potenze

Tre numeri interi positivi a , b , c tutti diversi fra loro sono tali che il loro prodotto è 16. Qual è il massimo valore possibile per l'espressione $a^b - b^c + c^a$?

[0263] Uno dei tre addendi sarà 1, e, per ottenere il valore massimo, deve essere b . Le due scelte possibili sono ora $a = 2$, $c = 8$ e $a = 8$, $c = 2$ che danno rispettivamente $2 - 1 + 8^2$ e $8 - 1 + 2^8$. La seconda scelta è quella cercata.

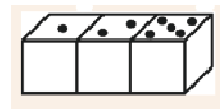
11. 2014!

Indichiamo con $2014!$ il prodotto $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 2012 \times 2013 \times 2014$ dei primi 2014 interi positivi. Considerate tutte le coppie (a, b) di interi positivi tali che $2014!$ sia divisibile per $2^a \times 19^b$. Qual è il valore più alto possibile per la somma $a + b$?

[2116] Nel prodotto ci sono 1007 numeri pari, 503 multipli di 4, 251 multipli di 8, 125 multipli di 16, 62 multipli di 32, 31 multipli di 64, 15 multipli di 128, 7 multipli di 256, 3 multipli di 512, 1 multiplo di 1024, per un totale di 2005 fattori 2 e inoltre 106 multipli di 19 e 5 di 19^2 , per un totale di 111 fattori 19.

12. I dadi

Accostate tre dadi facendo in modo che le facce combacianti di due dadi riportino gli stessi punti. Quanti sono, al variare degli allineamenti dei tre dadi compatibili con questa richiesta, i numeri di tre cifre tra loro diversi che possono venire indicati dalle facce superiori dei tre dadi? (I numeri vanno letti come d'uso da sinistra a destra: nell'esempio in figura il numero letto è 125. Tenete presente che le facce di un dado regolare sono numerate mediante punti da uno a sei e che la somma dei punti su due facce opposte qualunque è 7.)



[0168] Le scelte possibili dei punteggi sulle facce bloccate sono tre, e ciascuna dà origine a una famiglia di allineamenti. Fissiamo una prima scelta: due punteggi la cui somma vale 7 sono bloccati sulle facce a contatto (e estreme), gli altri 4 possono comparire sulle facce superiori, dando origine a 64 numeri diversi. Presa una seconda scelta, due dei punteggi che possono comparire sulle facce superiori erano già presenti nel primo gruppo, quindi i numeri non ancora ottenuti sono $64 - 8$; alla terza scelta, sono $64 - 8 - 8$: in totale 168.

13. La griglia

In ogni cella di una griglia 3×3 va inserito un numero intero positivo (celle diverse possono ospitare lo stesso numero) in modo che, sommando i numeri inseriti sia per righe sia per colonne, si ottengano sei risultati tutti diversi fra loro. Qual è il valore più basso possibile per la somma di tutti i numeri inseriti?

[0017] Volendo avere la somma più bassa possibile, incominciamo a mettere tutti 1 sulla prima riga e altri due 1 nei primi posti della seconda riga e osserviamo che l'aggiunta di qualunque altro 1 porterebbe a righe o colonne con termini uguali; completiamo la prima colonna con un 2, la seconda riga con un 3 e la seconda colonna con un 4; (abbiamo somme 3, 4, 5, 6); l'ultimo elemento da aggiungere non può essere 2 che darebbe somme 8 e 6, quindi aggiungiamo 3.

14. Numeri palindromi

Un numero intero si dice palindromo se le sue cifre, lette da sinistra a destra o da destra a sinistra, forniscono lo stesso risultato (ad esempio, 575 è palindromo, 576 non lo è). Quanti sono i numeri palindromi di 7 cifre?

[9000] Posso scegliere la prima cifra in 9 modi, ciascuna delle 3 successive in 10 modi mentre le ultime 3 sono automaticamente determinate.

15. Quadrati pari e quadrati dispari

Sia D la somma dei quadrati di tutti i numeri interi dispari compresi fra 1 e 99 inclusi. Sia P la somma dei quadrati di tutti i numeri interi pari compresi fra 2 e 100 inclusi. Quanto vale $P - D$?

[5050] Sia $2k$ un numero pari e $2k - 1$ il dispari che lo precede: $2k^2 - (2k - 1)^2 = 4k - 1$. $P - D$ è uguale allora alla somma dei numeri della forma $4k - 1$ per k che varia da 1 a 50, cioè $4 \times (50 \times 51) : 2 = 50$.