LIVELLO CADET

C1. (*5 punti*) Hai n oggetti e vuoi formare con essi tutte le coppie possibili (ad esempio, se gli oggetti sono le lettere A, B e C, le coppie possibili sono tre: {A,B}, {A,C} e {B,C}). Qualunque sia il numero n di oggetti (almeno 2), si scopre che il numero delle coppie che puoi formare coincide con la somma dei primi n - 1 numeri interi positivi. Senza usare alcuna formula, sapresti spiegare il motivo di questa coincidenza?

C2. (*7 punti*) Quanti numeri primi p sono tali che $4p + 1$ sia un quadrato perfetto?

C3. (*11 punti*) In una casetta nel bosco ci sono 15 piattini in fila: sul primo c'è 1 noce, sul secondo ci sono 2 noci, sul terzo 3 e così via fino al quindicesimo piattino su cui ci sono 15 noci. Ogni tanto uno scoiattolo entra nella casetta, sceglie alcuni piattini e mangia delle noci prendendone lo stesso numero da ognuno dei piattini scelti. Qual è il più piccolo numero di visite alla casetta che gli consente di mangiare tutte le noci?

C4. (*14 punti*) La bisettrice di uno degli angoli acuti di un triangolo rettangolo divide il cateto opposto in due segmenti, uno lungo 4 cm e l'altro lungo 5 cm. Calcola l'area del triangolo.

C5. (*18 punti*) n quadrati di una griglia 8 × 8 sono dipinti di nero, gli altri sono bianchi. Ogni quadrato della griglia, bianco o nero che sia, è adiacente a (cioè ha un lato in comune con) un quadrato nero (diverso da esso nel caso sia nero). Dimostra che puoi riuscirci annerendo solo 20 quadrati. (Rispondi annerendo opportunamente 20 quadrati della griglia riportata sotto.)

C6. (*22 punti*) Un numero naturale n è scomposto in 2014 fattori primi (non necessariamente tutti distinti fra loro). Ad ogni fattore primo viene sommato 1 e i nuovi 2014 numeri ottenuti vengono moltiplicati fra loro, dando come risultato un numero m. Per quanti interi n succede che, con queste premesse, m è divisibile per n?

LIVELLO CADET

C1. (*5 punti*) Hai n oggetti e vuoi formare con essi tutte le coppie possibili (ad esempio, se gli oggetti sono le lettere A, B e C, le coppie possibili sono tre: {A,B}, {A,C} e {B,C}). Qualunque sia il numero n di oggetti (almeno 2), si scopre che il numero delle coppie che puoi formare coincide con la somma dei primi $n - 1$ numeri interi positivi. Senza usare alcuna formula, sapresti spiegare il motivo di questa coincidenza?

Soluzione: Chiamiamo 1, 2, ..., n gli oggetti. Le coppie distinte che contengono 1 sono tante quante gli oggetti rimanenti: $n - 1$. Le coppie distinte che contengono 2, tolta quella già considerata formata con 1, sono tante quante gli oggetti rimanenti dopo che abbiamo tolto 1 e 2: $n - 2$.
Proseguendo in questo modo, arriviamo all'oggetto di nome $n - 1$: solo la coppia $\{n - 1, n\}$ non è già stata considerata. Così facendo, ogni possibile coppia è stata considerata una e una sola volta: in totale si hanno $(n - 1) + (n - 2) + ... + 2 + 1$ coppie.

C2. (*7 punti*) Quanti numeri primi p sono tali che $4p + 1$ sia un quadrato perfetto?

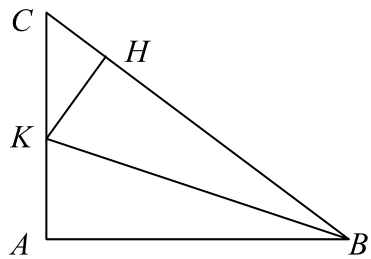
Soluzione: 1, solo p = 2.
$4p + 1 = n^2$ equivale a $p = (n - 1)(n + 1)/4$. Se p e n sono interi, n deve essere dispari: allora sia $(n - 1)/2$ sia $(n + 1)/2$ sono fattori interi di p. Poiché p è primo, deve essere $(n - 1)/2 = 1$.

C3. (*11 punti*) In una casetta nel bosco ci sono 15 piattini in fila: sul primo c'è 1 noce, sul secondo ci sono 2 noci, sul terzo 3 e così via fino al quindicesimo piattino su cui ci sono 15 noci. Ogni tanto uno scoiattolo entra nella casetta, sceglie alcuni piattini e mangia delle noci prendendone lo stesso numero da ognuno dei piattini scelti. Qual è il più piccolo numero di visite alla casetta che gli consente di mangiare tutte le noci?

Soluzione: 4.
Almeno 4 visite sono necessarie: una in cui viene mangiata 1 noce sola (per svuotare il primo piattino), almeno un'altra per svuotare il secondo, almeno un'altra ancora per svuotare il quarto e almeno una quarta per svuotare l'ottavo.
4 visite bastano: una strategia valida è fare in modo che aumenti il più possibile, ad ogni visita, il numero dei piattini con lo stessa quantità di noci.
Lo scoiattolo può iniziare a mangiare 8 noci da ciascuno dei piattini dall'ottavo in poi: l'ottavo resta vuoto e rimangono due piattini con 1 noce, due con 2 e così via fino a due con 7.
Nella seconda visita può mangiare 4 noci da ciascuno dei piattini che ne hanno da 4 in su: rimarranno tre piattini vuoti, quattro con 1 noce, quattro con 2 e quattro con 3.
Ora è chiaro come si prosegue: nella terza visita mangerà 2 noci da ogni piattino che ne ha almeno 2 e per la quarta visita rimarranno solo otto piattini con 1 noce ciascuno.

C4. (*14 punti*) La bisettrice di uno degli angoli acuti di un triangolo rettangolo divide il cateto opposto in due segmenti, uno lungo 4 cm e l'altro lungo 5 cm. Calcola l'area del triangolo.

Soluzione: 54 cm^2.

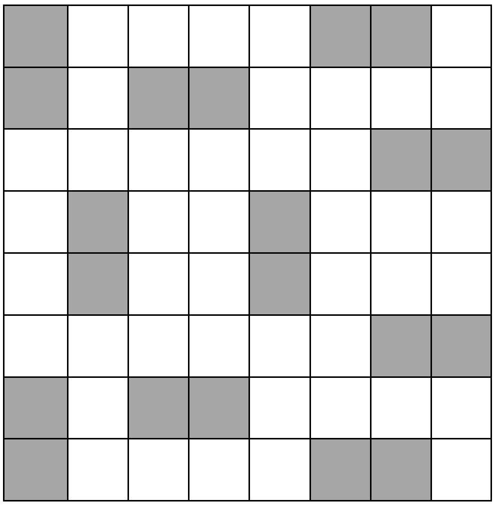


Si denotino con *ABC* i vertici del triangolo e sia *B* l'angolo di cui si traccia la bisettrice e *K* l'intersezione della bisettrice con il lato AC: il cateto *AC* è lungo 9 cm, quindi per trovare l'area del triangolo basta trovare la lunghezza del cateto *AB*.
Da *K* si tracci la perpendicolare a *CB*, che interseca *CB* in *H*: i due triangoli rettangoli *KHB* e *KAB* sono congruenti (II criterio di congruenza: hanno due angoli acuti congruenti e un lato in comune) e il triangolo rettangolo *CKH* è simile a *CBA* (poiché hanno l'angolo *C* in comune); poiché l'ipotenusa *CK* è più lunga del cateto *HK* che è congruente a *AK*, si deduce che *AK* ha lunghezza 4 cm e *KC* ha lunghezza 5 cm.
Applicando il teorema di Pitagora a *CKH* si trova che CH misura 3 cm e per la similitudine di *CKH* con *CBA* si ha che $AB : CA = KH : CH$ cioè *AB* misura $9 \times 4/3 = 12$ cm.
Quindi l'area del triangolo *ABC* è $9 \times 6 = 54$ cm^2.

C5. (*18 punti*) n quadrati di una griglia 8 × 8 sono dipinti di grigio, gli altri sono bianchi. Vuoi che ogni quadrato della griglia, bianco o grigio che sia, risulti adiacente a (cioè abbia un lato in comune con) un quadrato grigio (diverso da esso nel caso sia grigio). Dimostra che puoi riuscire nell'intento dipingendo di grigio solo 20 quadrati. (Rispondi dipingendo di grigio opportunamente 20 quadrati della griglia riportata qui sotto.)

Soluzione: ecco una possibilità.

.



Per approfondimenti vedere la soluzione del quesito J6.

C6. (*22 punti*) Un numero naturale n è scomposto in 2014 fattori primi (non necessariamente tutti distinti fra loro). Ad ogni fattore primo viene sommato 1 e i nuovi 2014 numeri ottenuti vengono moltiplicati fra loro, dando come risultato un numero m. Per quanti interi n succede che, con queste premesse, m è divisibile per n?

Soluzione: 336

È possibile e i numeri per cui accade sono 336.

Osserviamo per iniziare che se n contiene un fattore primo n_i, dovrà contenere anche un fattore primo n_j tale che $n_j + 1$ sia multiplo di n_i; se succede anche che $n_i + 1$ è multiplo di n_j non è necessario che esistano altri fattori primi di n. Questo però si verifica solo se n_i è 2 e n_j è 3 (o viceversa). In tutti gli altri casi, supposto $n_j > n_i$, dovrà poi esistere un fattore primo n_l ($>n_j$) tale che $n_l + 1$ sia multiplo di n_j e così via, generando una sequenza infinita di fattori primi, contro l'ipotesi.

Allora i fattori primi di n sono solo 2 e 3 e $n = 2^h \times 3^k$; si ha $m = 3^h \times 4^k$, che sarà divisibile per n se $k \leq h$ e $h \leq 2k$. Da $h + k = 2014$, ricaviamo $1007 \leq h \leq 1342$.