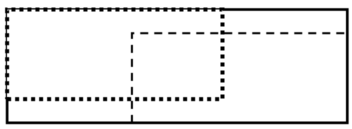
# Kangourou della Matematica 2014
# finale nazionale italiana
# Mirabilandia, 12 maggio 2014

## *LIVELLO BENJAMIN*

**B1.** (*5 punti*) Ad una esibizione di danza partecipano 4 ragazzi di nomi A, B, C e D e 6 ragazze di nomi R, S, T, U, V e Z che danzano a turno in coppie, un ragazzo e una ragazza. In ogni turno danzano 4 coppie e, dopo ogni turno, ogni coppia può sciogliersi per andare a formare nuove coppie nel turno successivo oppure riposare. Quanti turni di danza occorre che vengano effettuati affinché ogni ragazzo abbia danzato, almeno una volta, con ogni ragazza? Indica quali devono essere le coppie nei vari turni per rendere il numero dei turni il più piccolo possibile.

**B2.** (*7 punti*) Hai n oggetti e vuoi formare con essi tutte le coppie possibili (ad esempio, se gli oggetti sono le lettere A, B e C, le coppie possibili sono tre: {A,B}, {A,C} e {B,C}). Qualunque sia il numero n di oggetti (almeno 2), si scopre che il numero delle coppie che puoi formare coincide con la somma dei primi n - 1 numeri interi positivi. Senza usare alcuna formula, sapresti spiegare il motivo di questa coincidenza?

**B3.** (*11 punti*) Le dimensioni di un tavolino rettangolare sono una il triplo dell'altra. Luisa ha disposto sul tavolino due panni rettangolari uguali, ciascuno di area uguale alla metà dell'area del tavolo, come ti mostra la figura. L'area della zona sulla quale i panni si sovrappongono è 5 $dm^2$, mentre l'area della superficie del tavolo non coperta da alcuno dei panni è 1/15 dell'area del tavolo. Quanti metri misura il perimetro del tavolo?



**B4.** (*14 punti*) In una casetta nel bosco ci sono 15 piattini in fila: sul primo c'è 1 noce, sul secondo ci sono 2 noci, sul terzo 3 e così via fino al quindicesimo piattino su cui ci sono 15 noci. Ogni tanto uno scoiattolo entra nella casetta, sceglie alcuni piattini e mangia delle noci prendendone lo stesso numero da ognuno dei piattini scelti. Se fa quattro visite alla casetta, può riuscire a mangiare tutte le noci?

**B5.** (*18 punti*) Vuoi annerire *n* quadrati di una scacchiera 8 × 8, lasciando bianchi gli altri, in modo che ogni quadrato rimasto bianco della scacchiera sia adiacente a (cioè abbia un lato in comune con) un quadrato nero. Dimostra che puoi riuscirci annerendo solo 16 quadrati. (Rispondi annerendo opportunamente 16 quadrati della scacchiera riportata sotto.)

**B6.** (*22 punti*) Aldo, Bruno, Carlo, Dario ed Enrico si interessano a questioni di divisibilità. Aldo, Bruno, Carlo e Dario hanno fatto le seguenti affermazioni.

Aldo: "La somma di tre numeri interi consecutivi è sempre divisibile per 2".
Bruno: "La somma di tre numeri interi consecutivi non è mai divisibile per 2".
Carlo: "La somma di tre numeri interi consecutivi è sempre divisibile per 3".
Dario: "La somma di tre numeri interi consecutivi non è mai divisibile per 7".

Chi ha ragione e chi ha torto? Giustifica tutte le tue risposte.
Enrico invece chiede: "Qual è il più piccolo numero intero m (maggiore o uguale a 2) tale che la somma di m numeri interi consecutivi maggiori o uguali a 7, comunque vengano scelti, sia sempre divisibile per 7?". Prova a rispondergli.

# Kangourou della Matematica 2014
# finale nazionale italiana
# Mirabilandia, 12 maggio 2014

## *LIVELLO BENJAMIN*

**B1.** (*5 punti*) Ad una esibizione di danza partecipano 4 ragazzi di nomi A, B, C e D e 6 ragazze di nomi R, S, T, U, V e Z che danzano a turno in coppie, un ragazzo e una ragazza. In ogni turno danzano 4 coppie e, dopo ogni turno, ogni coppia può sciogliersi per andare a formare nuove coppie nel turno successivo oppure riposare. Quanti turni di danza occorre che vengano effettuati affinché ogni ragazzo abbia danzato, almeno una volta, con ogni ragazza? Indica quali devono essere le coppie nei vari turni per rendere il numero dei turni il più piccolo possibile.

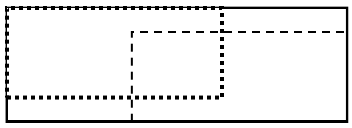
**Soluzione**: 46.
È chiaro che occorrono almeno 6 turni. In effetti 6 turni bastano: ecco una possibile composizione di coppie per 6 turni (ogni riga indica le coppie di un turno).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1) | AR | BS | CT | DU |
| 2) | AS | BT | CU | DV |
| 3) | AT | BU | CV | DZ |
| 4) | AU | BV | CZ | DR |
| 5) | AV | BZ | CR | DS |
| 6) | AZ | BR | CS | DT |

**B2.** (*7 punti*)
Hai n oggetti e vuoi formare con essi tutte le coppie possibili (ad esempio, se gli oggetti sono le lettere A, B e C, le coppie possibili sono tre: {A,B}, {A,C} e {B,C}). Qualunque sia il numero n di oggetti (almeno 2), si scopre che il numero delle coppie che puoi formare coincide con la somma dei primi n - 1 numeri interi positivi. Senza usare alcuna formula, sapresti spiegare il motivo di questa coincidenza?

**Soluzione**: Chiamiamo 1, 2, ..., n gli oggetti. Le coppie distinte che contengono 1 sono tante quante gli oggetti rimanenti: n - 1. Le coppie distinte che contengono 2, tolta quella già considerata formata con 1, sono tante quante gli oggetti rimanenti dopo che abbiamo tolto 1 e 2: n - 2. Proseguendo in questo modo, arriviamo all'oggetto di nome n - 1: solo la coppia {n - 1, n} non è già stata considerata. Così facendo, ogni possibile coppia è stata considerata una e una sola volta: in totale si hanno

$$(n - 1) + (n - 2) + \dots + 2 + 1 \text{ coppie.}$$



**B3.** (*11 punti*) Le dimensioni di un tavolino rettangolare sono una il triplo dell'altra. Luisa ha disposto sul tavolino due panni rettangolari uguali, ciascuno di area uguale alla metà dell'area del tavolo, come ti mostra la figura. L'area della zona sulla quale i panni si sovrappongono è 5 $dm^2$, mentre l'area della superficie del tavolo non coperta da alcuno dei panni è 1/15 dell'area del tavolo. Quanti metri misura il perimetro del tavolo?

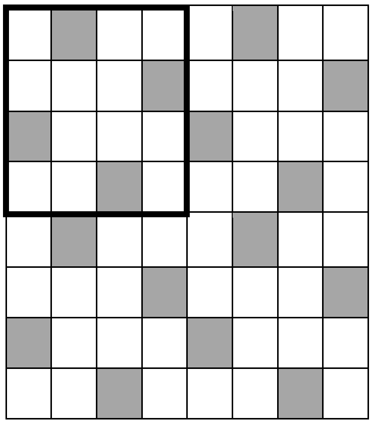
**Soluzione**: 4.
Poiché la somma delle aree dei due panni è uguale all'area del tavolo, l'area della zona in cui i due panni si sovrappongono è uguale a quella della zona che rimane scoperta e visto che questa è 1/15 dell'area del tavolo, il tavolo ha area $15 \times 5 = 75$ $dm^2$. Poiché il lato più lungo del rettangolo è tre volte il più corto, il tavolo può essere pensato come unione disgiunta di tre quadrati di area 25 $dm^2$ e quindi di lato 5 dm. Ne segue che il perimetro del rettangolo è 40dm = 4m.

**B4.** (*14 punti*) In una casetta nel bosco ci sono 15 piattini in fila: sul primo c'è 1 noce, sul secondo ci sono 2 noci, sul terzo 3 e così via fino al quindicesimo piattino su cui ci sono 15 noci. Ogni tanto uno scoiattolo entra nella casetta, sceglie alcuni piattini e mangia delle noci prendendone lo stesso numero da ognuno dei piattini scelti. Se fa quattro visite alla casetta, può riuscire a mangiare tutte le noci?

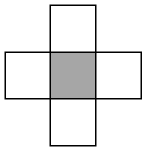
**Soluzione**: sì.
Una strategia valida è fare in modo che aumenti il più possibile, ad ogni visita, il numero dei piattini con lo stessa quantità di noci.
Lo scoiattolo può iniziare a mangiare 8 noci da ciascuno dei piattini dall'ottavo in poi: l'ottavo resta vuoto e rimangono due piattini con 1 noce, due con 2 e così via fino a due con 7.
Nella seconda visita può mangiare 4 noci da ciascuno dei piattini che ne hanno da 4 in su: rimarranno tre piattini vuoti, quattro con 1 noce, quattro con 2 e quattro con 3.
Ora è chiaro come si prosegue: nella terza visita mangerà 2 noci da ogni piattino che ne ha almeno 2 e per la quarta visita rimarranno solo otto piattini con 1 noce ciascuno.

**B5.** (*18 punti* ) Vuoi annerire *n* quadrati di una scacchiera 8 × 8, lasciando bianchi gli altri, in modo che ogni quadrato rimasto bianco della scacchiera sia adiacente a (cioè abbia un lato in comune con) un quadrato nero. Dimostra che puoi riuscirci annerendo solo 16 quadrati. (Rispondi annerendo opportunamente 16 quadrati della scacchiera riportata qui sotto.)

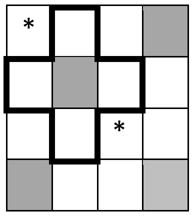
**Soluzione:**



NON RICHIESTO: Come si può trovare questa soluzione? Si può incominciare a risolvere il problema per una scacchiera 4×4. Il modulo base nella costruzione della copertura sarebbe costituito da una croce con al centro una casella nera



ma in questo caso non si può posizionare una croce completa poiché con soli quattro quadrati neri si lascerebbero scoperti un vertice e una casella interna (vedi asterischi, o una sul bordo, in dipendenza da come si situa la casella nera più lontana dalla croce)




Togliendo però una casella dalla croce si ha un modulo che (iterato quattro volte) riesce a coprire la scacchiera 4×4. Traslandolo 4 volte si ha la copertura di tutta la 8×8. Meno di 16 caselle nere però non bastano.

**B6.** (*22 punti* ) Aldo, Bruno, Carlo, Dario ed Enrico si interessano a questioni di divisibilità. Aldo, Bruno, Carlo e Dario hanno fatto le seguenti affermazioni.
Aldo: "La somma di tre numeri interi consecutivi è sempre divisibile per 2".
Bruno: "La somma di tre numeri interi consecutivi non è mai divisibile per 2".
Carlo: "La somma di tre numeri interi consecutivi è sempre divisibile per 3".
Dario: "La somma di tre numeri interi consecutivi non è mai divisibile per 7".
Chi ha ragione e chi ha torto? Giustifica tutte le tue risposte.
Enrico invece chiede: "Qual è il più piccolo numero intero m (maggiore o uguale a 2) tale che la somma di m numeri interi consecutivi maggiori o uguali a 7, comunque vengano scelti, sia sempre divisibile per 7?". Prova a rispondergli.

**Soluzione**:

- Aldo ha torto: ad esempio 2 + 3 + 4 è dispari (se il più piccolo dei tre interi è pari, la somma è dispari).
- Bruno ha torto: ad esempio 1 + 2 + 3 è pari (se il più piccolo dei tre interi è dispari, la somma è pari).
- Carlo ha ragione: se n è il più piccolo dei tre interi, essi sono n, n + 1 e n + 2; la loro somma è 3 più 3 volte n e questo numero è divisibile per 3.
- Dario ha torto: ad esempio 6 + 7 + 8 è divisibile per 7 (se il più piccolo dei tre interi è inferiore di 1 a un multiplo di 7, il più grande supera di 1 lo stesso multiplo di 7, dunque la somma dei tre è divisibile per 7).
- Risposta ad Enrico: è 7. Infatti la somma di 7 interi consecutivi è sempre divisibile per 7 poiché per qualunque numero intero n si ha n + (n + 1) + (n + 2) + … + (n + 6) = 7n + 21. D'altra parte, per m = 2, 3, 4, 5, 6 è possibile trovare m interi consecutivi maggiori o uguali a 7 la cui somma non sia divisibile per 7: ad esempio nessuno dei numeri 7 + 8, 7 + 8 + 9, 7 + 8 + 9 + 10, 7 + 8 + 9 + 10 + 11, 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 è divisibile per 7.