Università degli Studi di Milano

Quesiti

1. Il lavoro aumenta

Aumentando le ore di lavoro degli operai (e lo stipendio!), il titolare di una fabbrica di televisori ha aumentato la produzione del 25%. In seguito, a fronte di una diminuita richiesta del prodotto, 39 operai hanno potuto essere trasferiti ad una fabbrica di frigoriferi e, dopo il loro trasferimento, rimanendo aumentate le ore di lavoro per gli operai restanti, la produzione della fabbrica di televisori è ritornata quella che era prima dell'aumento delle ore. Quanti operai lavoravano alla fabbrica di televisori prima dell'aumento delle ore di lavoro?

2. Il lato del rettangolo

Marco ha disegnato un quadrato *ABCD* di 54 millimetri di lato. Sul lato *AB* ha quindi individuato il punto *E* distante 3 millimetri da *A*. Elena ha disegnato un rettangolo *KLMN* il cui lato *KL* è lungo 5 millimetri e ha osservato che la misura degli angoli *ACE* e *KML* è la stessa. Quanti millimetri è lungo il lato *LM* del rettangolo disegnato da Elena?

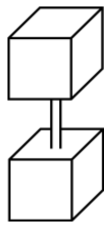
3. Mettete voi le parentesi

Nella sequenza di operazioni

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$$

siete liberi di inserire tutte le parentesi che volete (anche di più tipi, le une internamente alle altre) nelle posizioni che volete, purché non otteniate delle moltiplicazioni fra i contenuti di due coppie di parentesi: ad esempio potete scrivere $[1 - (2 + 3 - 4)] + \ldots$, ma non
$(1 - 2 + 3)(-4 + 5 - 6) + \ldots$. Rispettando questa regola, qual è il numero più alto che potete ottenere come risultato dell'espressione?

4. Quanta acqua?



La figura ti mostra una clessidra ad acqua costruita utilizzando due cubi uguali. La clessidra ha acqua per funzionare continuativamente per 4 minuti; quando l'acqua sta tutta in uno dei due cubi, quel cubo è pieno esattamente a metà. Se l'acqua cade per 20 secondi senza interruzione, il livello dell'acqua nel cubo inferiore sale esattamente di 1 centimetro. Qual è, in centimetri cubi, il volume dell'acqua nella clessidra?

5. Tronco di piramide

Avete una piramide retta a base quadrata di 66 centimetri di altezza; volete tagliare la piramide con un piano parallelo alla sua base spezzandolo in una piramide più piccola e in un tronco di piramide in maniera che il volume del tronco di piramide sia 26 volte quello della piramide piccola. Quale distanza dalla base, in centimetri, dovrà avere il piano usato per il taglio?

6. Pile di pedine

Marco ha formato sul tavolo due pile di pedine, la prima di 75 pedine e la seconda di 81, e vuole fare il seguente solitario. Ad ogni turno può fare una e una sola delle mosse seguenti: *a)* togliere 4 pedine dalla prima pila; *b)* togliere 5 pedine dalla seconda pila; *c)* togliere una pedina da ciascuna delle due pile.
Qual è il numero minimo di mosse facendo le quali Marco può togliere tutte le pedine dal tavolo?
Scrivete [0000] se ritenete che Marco non possa concludere il gioco.

7. Il cubo numerato

Su ciascuna faccia di un cubo è scritto un numero intero positivo; ad ogni vertice del cubo viene assegnato il numero che è il prodotto dei numeri scritti sulle facce che hanno quel vertice in comune. La somma di tutti i numeri assegnati ai vertici è 1001. Qual è la somma di tutti numeri che sono scritti sulle facce?

8. La somma

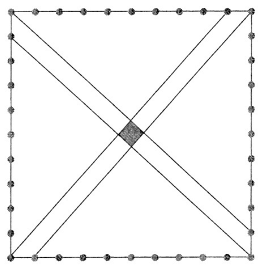
In ogni casella di una scacchiera 8×8 è scritto un numero intero; i numeri scritti in due caselle che abbiano un lato in comune differiscono sempre di 1. Nella scacchiera compaiono sia il numero 3 sia il numero 17. Qual è la somma di tutti i numeri che compaiono nella scacchiera?

9. Non tutti

Quanti sono i numeri di tre cifre (significative) *ABC* tali che $A + B$ sia diverso da C?

10. Il parco

La figura suggerisce lo schema di un parco quadrato. Sui suoi lati sono piantati degli alberi equidistanziati, lo stesso numero di alberi per tutti i lati, e in ogni vertice c'è un albero. Il parco è attraversato da due viali; i bordi di ogni viale sono paralleli: uno termina in un vertice del quadrato, l'altro contro un albero adiacente il vertice opposto. I due viali si intersecano in una piazzetta, indicata in grigio, la cui superficie è 1/365 della superficie del quadrato. Quanti sono gli alberi lungo tutto il perimetro del parco?
(Il numero degli alberi in figura non corrisponde a quello effettivo.)



11. Il numero più grande

Cecilia ha scritto, uno dopo l'altro in fila, i primi 20 numeri interi ottenendo la sequenza

123456789101112...1920

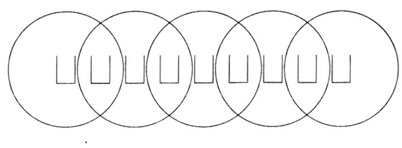
Ora vuole cancellare esattamente 20 delle cifre scritte ed ottenere un nuovo numero accostando quelle rimaste (senza cambiarne l'ordine). Quali sono le prime quattro cifre del numero più grande che può ottenere?

12. Il triangolo sezionato

Marco riesce a sezionare un triangolo isoscele *ABC* (*AB*=*AC*) lungo il segmento che collega il vertice *A* ad un punto *D* sul lato opposto, in maniera che l'angolo di lati *AC* e *AD* sia di 33° e il triangolo *ABD* sia isoscele con *AB* = *BD*. Quale è, in gradi, la misura dell'angolo *BAD*?

13. I dischi magici

Osservate la figura. Gianna vuole inserire, una in ciascuna casella, tutte le cifre da 1 a 9 nelle caselle disponibili in modo che la somma delle cifre inserite all'interno di ciascuno dei dischi sia sempre la stessa e sia la più piccola possibile, e che anche il numero ottenuto accostando le 9 cifre scritte sia il più piccolo possibile. Quali sono le prime quattro cifre inserite partendo da sinistra?



14. Solo cifre pari

Dalla sequenza 1, 2, 3, 4, 5 , 6, … dei numeri interi positivi, eliminate tutti e soli quelli per scrivere i quali è necessario impiegare almeno una cifra dispari. Vi rimangono, nell'ordine: 2, 4, 6, 8, 20, 22, … . Quale numero occupa il 126-mo posto in questa nuova sequenza?

15. Sottrazione

Da un numero di tre cifre sottraete la somma dei cubi delle sue cifre. Qual è il risultato più grande che potete ottenere?

Quesiti e soluzioni

1. Il lavoro aumenta

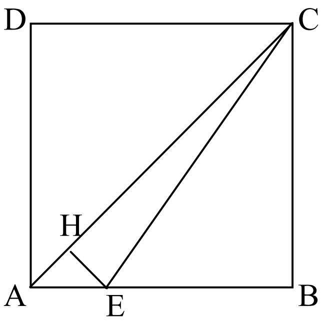
Aumentando le ore di lavoro degli operai (e lo stipendio!), il titolare di una fabbrica di televisori ha aumentato la produzione del 25%. In seguito, a fronte di una diminuita richiesta del prodotto, 39 operai hanno potuto essere trasferiti ad una fabbrica di frigoriferi e, dopo il loro trasferimento, rimanendo aumentate le ore di lavoro per gli operai restanti, la produzione della fabbrica di televisori è ritornata quella che era prima dell'aumento delle ore. Quanti operai lavoravano alla fabbrica di televisori prima dell'aumento delle ore di lavoro?

[0195] Se con 39 operai in meno la produzione passa dal 125% al 100%, cioè da 5/4 a 4/4, significa che 39 operai costituivano un quinto della forza lavoro.

2. Il lato del rettangolo

Marco ha disegnato un quadrato *ABCD* di 54 millimetri di lato. Sul lato *AB* ha quindi individuato il punto *E* distante 3 millimetri da *A*. Elena ha disegnato un rettangolo *KLMN* il cui lato *KL* è lungo 5 millimetri e ha osservato che la misura degli angoli *ACE* e *KML* è la stessa. Quanti millimetri è lungo il lato *LM* del rettangolo disegnato da Elena?

[0175]



Consideriamo la proiezione ortogonale H del punto E sulla diagonale AC del quadrato ABCD: dato che gli angoli KML e ACE hanno la stessa misura, il triangolo KML rettangolo in L è simile al triangolo EHC, rettangolo in H. In generale detta q la misura del lato del quadrato e d la misura del segmento AE :

1. la misura di AC è $q\sqrt{2}$
2. la misura di HE è $d/\sqrt{2}$ e quindi quella di HC è $q\sqrt{2} - d/\sqrt{2} = (2q - d)/\sqrt{2}$

e dato che LM : KL = HC : HE, la misura di LM è $(2q - d)/d = 2q/d - 1$ volte la misura di KL.

3. Mettete voi le parentesi

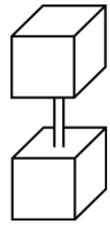
Nella sequenza di operazioni

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + 9 - 10$$

siete liberi di inserire tutte le parentesi che volete (anche di più tipi, le une internamente alle altre) nelle posizioni che volete, purché non otteniate delle moltiplicazioni fra i contenuti di due coppie di parentesi: ad esempio potete scrivere $[1 - (2 + 3 - 4)] + \ldots$, ma non $(1 - 2 + 3)(-4 + 5 - 6) + \ldots$. Rispettando questa regola, qual è il numero più alto che potete ottenere come risultato dell'espressione?

[0045] Chiaramente il risultato non può che essere inferiore a 1 + … +10 = 55. Si può scrivere 1 – [2 +3 – (4 + 5) – (6 + 7) – (8 + 9) – 10] = 45. Non potendo intervenire su quantità e ordine di addendi e segni, è evidente che questo è il migliore risultato possibile: con un solo segno meno posto nella posizione di "minor danno", si è ottenuto l'effetto di trasformare in segni più tutti gli altri segni meno.

4. Quanta acqua?



La figura ti mostra una clessidra ad acqua costruita utilizzando due cubi uguali. La clessidra ha acqua per funzionare continuativamente per 4 minuti; quando l'acqua sta tutta in uno dei due cubi, quel cubo è pieno esattamente a metà. Se l'acqua cade per 20 secondi senza interruzione, il livello dell'acqua nel cubo inferiore sale esattamente di 1 centimetro. Qual è, in centimetri cubi, il volume dell'acqua nella clessidra?

[6912] In 4 minuti il livello dell'acqua sale di 12 cm: quindi il lato del cubo è di 24 cm e di conseguenza il volume dell'acqua è $12 \times 24 \times 24 = 6912$ cm^3.

5. Tronco di piramide

Avete una piramide retta a base quadrata di 66 centimetri di altezza; volete tagliare la piramide con un piano parallelo alla sua base spezzandolo in una piramide più piccola e in un tronco di piramide in maniera che il volume del tronco di piramide sia 26 volte quello della piramide piccola. Quale distanza dalla base, in centimetri, dovrà avere il piano usato per il taglio?

[0044] Perché il tronco di piramide abbia volume 26 volte quello della piramide piccola, la piramide piccola deve avere volume pari a 1/27 del volume della piramide iniziale. Poiché la piramide piccola è simile alla piramide iniziale, i loro volumi sono proporzionali al cubo dell'altezza, quindi l'altezza della piramide piccola deve essere un terzo di quella della piramide grande.

6. Pile di pedine

Marco ha formato sul tavolo due pile di pedine, la prima di 75 pedine e la seconda di 81, e vuole fare il seguente solitario. Ad ogni turno può fare una e una sola delle mosse seguenti: *a)* togliere 4 pedine dalla prima pila; *b)* togliere 5 pedine dalla seconda pila; *c)* togliere una pedina da ciascuna delle due pile.
Qual è il numero minimo di mosse facendo le quali Marco può togliere tutte le pedine dal tavolo? Scrivete [0000] se ritenete che Marco non possa concludere il gioco.

[0041] Chiaramente a Marco conviene fare il maggior numero possibile di mosse dei tipi *a)* e *b)*. Gli conviene dunque compiere mosse di tipo *c)* fino a quando, per la prima volta, sulla prima pila rimarrà un numero di pedine multiplo di 4 e, contemporaneamente, sulla seconda un numero di pedine multiplo di 5. Facilmente si calcola che ciò accade dopo 11 mosse di tipo *c)*.
11 + (64 : 4) + (70 : 5) = 41.

7. Il cubo numerato

Su ciascuna faccia di un cubo è scritto un numero intero positivo; ad ogni vertice del cubo viene assegnato il numero che è il prodotto dei numeri scritti sulle facce che hanno quel vertice in comune. La somma di tutti i numeri assegnati ai vertici è 1001. Qual è la somma di tutti numeri che sono scritti sulle facce?

[0031] Se si denotano rispettivamente con (a,d), (b,e), (c,f) i numeri scritti sulle facce opposte del cubo si vede che la somma dei numeri nei vertici è $(a + d)$ $(b + e)$ $(c + f)$. Il problema ha soluzione se e solo se 1045 è esprimibile in uno e un solo modo come prodotto di tre fattori ognuno maggiore di 1: la risposta sarà la somma di questi tre fattori.

$$1001 = 7 \times 11 \times 13 \Rightarrow (a + d) + (b + e) + (c + f) = 31.$$

8. La somma

In ogni casella di una scacchiera 8×8 è scritto un numero intero; i numeri scritti in due caselle che abbiano un lato in comune differiscono sempre di 1. Nella scacchiera compaiono sia il numero 3 sia il numero 17. Qual è la somma di tutti i numeri che compaiono nella scacchiera?

[0640] In ogni riga e in ogni colonna la differenza fra il numero dell'ultima casella e quello della prima non può superare 7: dal momento che sia 3 sia 17 compaiono nella scacchiera, è necessario che questa differenza sia proprio 7 e che dunque questi due numeri occupino caselle di vertice opposte.
La somma dei numeri sulla riga di posto N è

$$(2 + N) + (3 + N) + \ldots + (9 + N) = 8N + (2 + 3 + \ldots + 9) = 8N + 44$$

e quindi sommando sulle 8 righe si ha

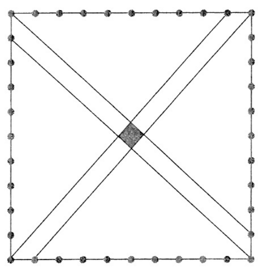
$$8(1 + 2 + \ldots + 8 + 44) = 8(36 + 44) = 640.$$

9. Non tutti

Quanti sono i numeri di tre cifre (significative) ABC tali che $A + B$ sia diverso da C?

[0855] I numeri di tre cifre significative sono 900 (999 – 99). Conviene contare quanti sono i numeri ABC tali che $A + B = C$ e procedere per differenza. Le cifre C ammissibili sono tutte tranne lo zero (che fornirebbe $A = B = 0$); per ciascuna, come coppia ordinata (A,B) è accettabile la coppia $(C,0)$ ma non la coppia $(0,C)$, oltre naturalmente alle altre coppie tali che $A + B = C$. Allora ogni cifra n fornisce esattamente n coppie accettabili, per un totale di $1 + 2 + \ldots + 9 = 45$ coppie. 900 – 45 = 855.

10. Il parco



La figura suggerisce lo schema di un parco quadrato. Sui suoi lati sono piantati degli alberi equidistanziati, lo stesso numero di alberi per tutti i lati, e in ogni vertice c'è un albero. Il parco è attraversato da due viali; i bordi di ogni viale sono paralleli: uno termina in un vertice del quadrato, l'altro contro un albero adiacente il vertice opposto. I due viali si intersecano in una piazzetta, indicata in grigio, la cui superficie è 1/365 della superficie del quadrato. Quanti sono gli alberi lungo tutto il perimetro del parco?
(Il numero degli alberi in figura non corrisponde a quello effettivo.)

[0056] La piazzetta è quadrata per evidenti ragioni di simmetria e di perpendicolarità: sia a la lunghezza del suo lato, che coincide con la larghezza dei viali. Assumiamo che siano 1 la lunghezza dei lati del parco, h la lunghezza dei bordi dei viali e $n + 1$ il numero di alberi sui singoli lati (alberi ai vertici inclusi). Per evidenti ragioni di similitudine, deve essere $h : 1 = 1/n : a$, da cui $h = 1/na$.
Il teorema di Pitagora fornisce allora

$$1 + (1 - 1/n)^2 = h^2 = 1/n^2a^2 = 365/n^2$$

cioè $n^2 + (n - 1)^2 = 365$, da cui $n = 14$.

11. Il numero più grande

Cecilia ha scritto, uno dopo l'altro in fila, i primi 20 numeri interi ottenendo la sequenza

$$123456789101112...1920$$

Ora vuole cancellare esattamente 20 delle cifre scritte ed ottenere un nuovo numero accostando quelle rimaste (senza cambiarne l'ordine). Quali sono le prime quattro cifre del numero più grande che può ottenere?

[9561] Le cifre che devono rimanere sono 11; poiché ve ne sono a sufficienza dopo il primo 9, è possibile iniziare tenendo questo 9. Anche come seconda cifra conviene tenere la più alta possibile: scartati il 9, l'8, il 7 e il 6 in quanto seguiti rispettivamente da solo 2, 4, 6 e 8 cifre, è giocoforza scegliere il 5 di 15. A questo punto si può e si deve scartare solo una delle 10 cifre rimanenti: è ovvio che conviene scartare l'1 di 16. Il numero è dunque 95617181920.

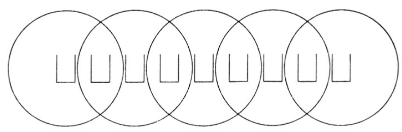
12. Il triangolo sezionato

Marco riesce a sezionare un triangolo isoscele ABC (AB=AC) lungo il segmento che collega il vertice A ad un punto D sul lato opposto, in maniera che l'angolo di lati AC e AD sia di 33° e il triangolo ABD sia isoscele con $AB = BD$. Quale è, in gradi, la misura dell'angolo BAD?

[0071] Indicata con x la misura in gradi dell'angolo BAD, essendo ABD isoscele con vertice in B, l'angolo in B misura $180 - x$ gradi, quanto l' angolo BCA, essendo ABC isoscele con vertice in A. Quindi, tenuto conto che la somma delle misure degli angoli interni di ABC è 180, se l'angolo DAC misura 33 gradi si ha $2(180 - 2x) + x + 39 = 180$, da cui $x = 71$.

13. I dischi magici

Osservate la figura. Gianna vuole inserire, una in ciascuna casella, tutte le cifre da 1 a 9 nelle caselle disponibili in modo che la somma delle cifre inserite all'interno di ciascuno dei dischi sia sempre la stessa e sia la più piccola possibile, e che anche il numero ottenuto accostando le 9 cifre scritte sia il più piccolo possibile. Quali sono le prime quattro cifre inserite partendo da sinistra?



[8371] Minimizzare la somma delle cifre inserite nei singoli cinque cerchi (che è sempre la stessa) equivale a minimizzare cinque volte tale somma: è logico dunque appurare se sia possibile fare in modo che le cinque cifre più alte (5, 6, … ,9) compaiano ciascuna all'interno di un solo cerchio.
Se questo è possibile, per ogni cerchio la somma delle cifre al suo interno deve essere

$$(1 + 2 + \ldots + 9 + 1 + 2 + 3 + 4) / 5 = 11.$$

In effetti le disposizioni 837164529 e la sua simmetrica 925461738 mostrano che ciò è possibile, e si vede facilmente che sono le uniche disposizioni ammissibili.

14. Solo cifre pari

Dalla sequenza 1, 2, 3, 4, 5 , 6, … dei numeri interi positivi, eliminate tutti e soli quelli per scrivere i quali è necessario impiegare almeno una cifra dispari. Vi rimangono, nell'ordine: 2, 4, 6, 8, 20, 22, … . Quale numero occupa il 126-mo posto in questa nuova sequenza?

[2002] I numeri da conservare nei primi 10 sono 4, da 20 a 88 sono 20; per ogni centinaio che ha cifra delle centinaia pari sono 25: quindi da 2 a 888 sono 124 numeri; il successivo da accettare è 2000 e quindi 2002 è il 126-mo.

15. Sottrazione

Da un numero di tre cifre sottraete la somma dei cubi delle sue cifre. Qual è il risultato più grande che potete ottenere?

[0396] Poiché il cubo di una cifra non può essere inferiore al numero dato dalla cifra stessa, conviene che la cifra delle unità del numero di partenza sia 0 oppure 1 (la scelta non influisce sul risultato finale). Passando in rassegna le cifre da assegnare a decine e centinaia, si scopre facilmente che esse devono essere rispettivamente 2 e 6.

620 – (0 + 8 + 216) = 396.