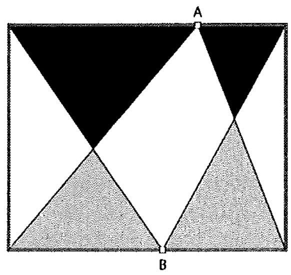
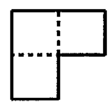
Kangourou della Matematica 2013
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 6 maggio 2013

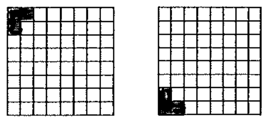
LIVELLO JUNIOR

J1. (*5 punti*) Osserva la figura dove *A* e *B* sono due punti (diversi dai vertici) presi a caso su due lati opposti di un rettangolo. Dimostra che, indipendentemente dalla scelta di *A* e di *B*, la somma delle aree dei due triangoli neri coincide con la somma delle aree dei due triangoli grigi.



J2. (*7 punti*) Hai una scacchiera 8 × 8 e un tassello come quello in figura formato accostando tre quadrati, ciascuno della stessa dimensione delle caselle della scacchiera. In quante posizioni diverse puoi sistemare il tassello sulla scacchiera, se vuoi che il tassello copra esattamente tre caselle della scacchiera? Attenzione: quelle che ti mostriamo come esempio sono due sistemazioni diverse, anche se sono ottenibili l'una dall'altra per rotazione.





J3. (*11 punti*) Un quadrilatero convesso (cioè tale che ognuno dei suoi angoli interni misuri meno di 180 gradi) è ripartito dalle sue diagonali in quattro triangoli. Supponiamo che l'area di ciascuno di questi triangoli sia espressa da un numero intero. Il prodotto delle quattro aree è necessariamente un quadrato perfetto?

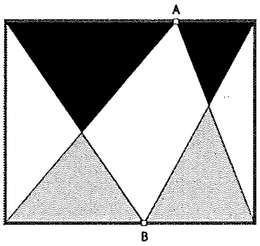
J4. (*14 punti*) Qual è il più piccolo numero intero *k* maggiore di 1 che gode della seguente proprietà: ogni volta che l'intero *n* è somma di due quadrati perfetti, anche *kn* lo è?

J5. (*18 punti*) In una città ogni abitante o era un veritiero, cioè diceva sempre la verità, oppure era un bugiardo, cioè mentiva sempre. Un certo giorno arrivò un ispettore per prendere informazioni su ciascun cittadino. A tale scopo, dopo aver stilato l'elenco in ordine alfabetico di tutti i cittadini, chiese a ciascuno se il cittadino a lui successivo nell'elenco fosse un veritiero o un bugiardo (all'ultimo chiese del primo). Tutti quelli che erano stati dichiarati bugiardi furono banditi dalla città. Tra gli abitanti rimasti in città, i veritieri che avevano denunciato dei bugiardi, dispiaciuti di aver causato il bando di loro concittadini, abbandonarono a loro volta la città. Il loro numero era 1/3 di quello dei veritieri banditi perché denunciati come bugiardi. Di tutti gli abitanti che, costretti o per propria scelta, lasciarono la città, che frazione è costituita da veritieri?

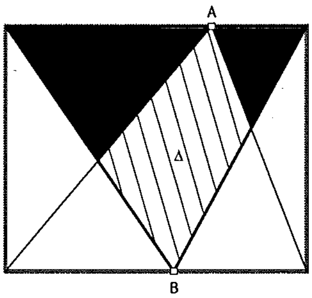
J6. (*22 punti*) Assegnati *n* punti distinti nel piano, dove *n* è un intero maggiore o uguale a 2, si consideri l'insieme *S* costituito dai punti medi di tutti i segmenti che hanno come estremi due degli *n* punti dati. Mostrare che in *S* vi sono almeno $2n - 3$ punti distinti. Mostrare anche che, per ogni $n \geq 2$, è possibile assegnare gli *n* punti in modo che l'insieme *S* corrispondente sia costituito da esattamente $2n - 3$ punti.

LIVELLO JUNIOR

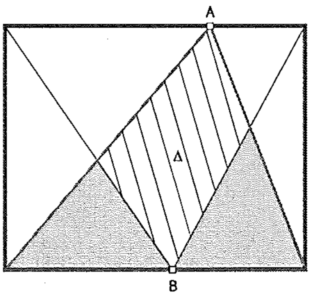
J1. (*5 punti*) Osserva la figura dove *A* e *B* sono due punti (diversi dai vertici) presi a caso su due lati opposti di un rettangolo. Dimostra che, indipendentemente dalla scelta di *A* e di *B*, la somma delle aree dei due triangoli neri coincide con la somma delle aree dei due triangoli grigi.



Soluzione:

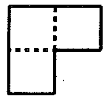


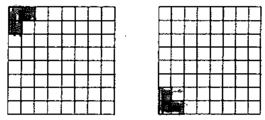
Il triangolo ottenuto aggiungendo all'unione dei due triangoli neri il quadrilatero tratteggiato ha area uguale alla metà dell'area del rettangolo.
La stessa cosa è vera nella figura seguente



per il triangolo ottenuto aggiungendo all'unione dei due triangoli grigi il medesimo quadrilatero tratteggiato.

J2. (*7 punti*) Hai una scacchiera 8 × 8 e un tassello come quello in figura formato accostando tre quadrati, ciascuno della stessa dimensione delle caselle della scacchiera. In quante posizioni diverse puoi sistemare il tassello sulla scacchiera, se vuoi che il tassello copra esattamente tre caselle della scacchiera? Attenzione: quelle che ti mostriamo come esempio sono due sistemazioni diverse, anche se sono ottenibili l'una dall'altra per rotazione.

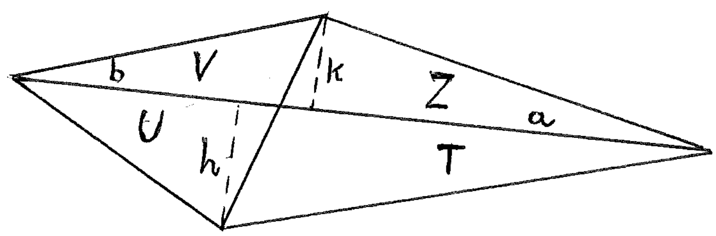




Soluzione: 196.
Ogni insieme di 4 caselle che, accostate, formino un quadrato può ospitare il tassello in quattro posizioni diverse. Gli insiemi di questo tipo sono 49, tanti quanti le coppie (7) di caselle adiacenti che ognuna delle prime 7 righe della scacchiera può ospitare.

J3. (*11 punti*) Un quadrilatero convesso (cioè tale che ognuno dei suoi angoli interni misuri meno di 180 gradi) è ripartito dalle sue diagonali in quattro triangoli. Supponiamo che l'area di ciascuno di questi triangoli sia espressa da un numero intero. Il prodotto delle quattro aree è necessariamente un quadrato perfetto?

Soluzione: si.
Siano T, U, V e Z i quattro triangoli come in figura e siano t, u, v e z le rispettive loro aree. Sia h l'altezza di T e di U, di basi a e b rispettivamente e sia k l'altezza di V e di Z, di basi b e a rispettivamente. Sia ha $t = ah/2$, $u = bh/2$, $v = bk/2$ e $z = ak/2$. Allora $tuvz = (ah/2)^2(bk/2)^2 = \{(ah/2)(bk/2)\}^2$ dove $ah/2$ e $bk/2$ per ipotesi sono numeri interi.



J4. (*14 punti*) Qual è il più piccolo numero intero k maggiore di 1 che gode della seguente proprietà: ogni volta che l'intero n è somma di due quadrati perfetti, anche kn lo è?

Soluzione: 2.
È ovvio che se l'intero n è somma di due quadrati perfetti anche $4n$ lo è: quindi k non è maggiore di 4 e non può essere 3 per ovvi motivi di scomposizione in fattori primi. L'esempio $2(1 + 4) = 1 + 9$ suggerisce che k possa essere 2. In effetti, se $n = p^2 + q^2$, allora $2n = (p + q)^2 + (p - q)^2$.

J5. (*18 punti*) In una città ogni abitante o era un veritiero, cioè diceva sempre la verità, oppure era un bugiardo, cioè mentiva sempre. Un certo giorno arrivò un ispettore per prendere informazioni su ciascun cittadino. A tale scopo, dopo aver stilato l'elenco in ordine alfabetico di tutti i cittadini, chiese a ciascuno se il cittadino a lui successivo nell'elenco fosse un veritiero o un bugiardo (all'ultimo chiese del primo). Tutti quelli che erano stati dichiarati bugiardi furono banditi dalla città. Tra gli abitanti rimasti in città, i veritieri che avevano denunciato dei bugiardi, dispiaciuti di aver causato il bando di loro concittadini, abbandonarono a loro volta la città. Il loro numero era 1/3 di quello dei veritieri banditi perché denunciati come bugiardi. Di tutti gli abitanti che, costretti o per propria scelta, lasciarono la città, che frazione è costituita da veritieri?

Soluzione: 4/7.
Indichiamo con V, V_V e V_B rispettivamente tutti i veritieri, quelli che rispondono (onestamente) che la persona su cui sono interrogati è un veritiero e quelli che rispondono (onestamente) che la persona su cui sono interrogati è un bugiardo; analogamente B, B_V e B_B indicano rispettivamente il numero di tutti i bugiardi, dei bugiardi che rispondono (falsamente) che la persona su cui sono interrogati è un veritiero e dei bugiardi che rispondono (falsamente) che la persona su cui sono interrogati è un bugiardo. Le persone che lasciano la città sono $V_B + B_B + B_B/3$, di cui $B_B + B_B/3$ veritieri. Poiché si ha $V = V_V + V_B = V_V + B_B$, $V_B = B_B$, cioè i bugiardi accusati dai veritieri sono tanti quanti i veritieri accusati di essere bugiardi dai bugiardi, i veritieri sono i 4/7 di tutti quelli che lasciano la città.

J6. (*22 punti*) Assegnati n punti distinti nel piano, dove n è un intero maggiore o uguale a 2, si consideri l'insieme S costituito dai punti medi di tutti i segmenti che hanno come estremi due degli n punti dati. Mostrare che in S vi sono almeno $2n - 3$ punti distinti. Mostrare anche che, per ogni $n \geq 2$, è possibile assegnare gli n punti in modo che l'insieme S corrispondente sia costituito da esattamente $2n - 3$ punti.

Soluzione
Sia T l'insieme degli n punti assegnati e siano a e b due punti di T che realizzano la massima distanza possibile r fra due punti di T. I punti medi degli $n - 1$ segmenti che hanno a come un estremo sono tutti diversi fra loro e si trovano tutti nel cerchio C_a di centro a e raggio $r/2$; i punti medi degli $n - 1$ segmenti che hanno b come un estremo sono tutti diversi fra loro e si trovano tutti nel cerchio C_b di centro b e raggio $r/2$. I cerchi C_a e C_b hanno esattamente un punto in comune, per cui i punti di S sono almeno $2(n - 1) - 1$.
In effetti, se gli n punti sono allineati e la distanza fra due punti adiacenti è sempre la stessa, S ha esattamente $2n - 3$ punti.