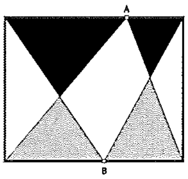
Kangourou della Matematica 2013
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 6 maggio 2013

LIVELLO CADET

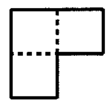
C1. (*5 punti*) Anna e Carlo si trovano in due punti diametralmente opposti del bordo di una fontana circolare. Iniziano a correre intorno alla fontana nello stesso verso e la velocità di Carlo è i 21/19 della velocità di Anna. Quando Carlo la raggiungerà, quanti giri o frazione di giro avrà fatto Anna attorno alla fontana?

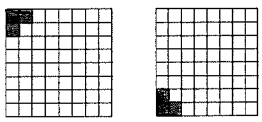
C2. (*7 punti*) Osserva la figura dove *A* e *B* sono due punti (diversi dai vertici) presi a caso su due lati opposti di un rettangolo. Dimostra che, indipendentemente dalla scelta di *A* e di *B*, la somma delle aree dei due triangoli neri coincide con la somma delle aree dei due triangoli grigi.



C3. (*11 punti*) In un paese 10 anni fa abitavano 2013 persone. Ognuna di queste persone era un veritiero, cioè diceva sempre la verità, oppure un bugiardo, cioè mentiva sempre. Un certo giorno, uno alla volta, tutti gli abitanti del paese hanno abbandonato il paese dicendo: "Dopo che me ne sarò andato io, in questo paese il numero dei veritieri sarà uguale al numero dei bugiardi". Quanti erano 10 anni fa i bugiardi abitanti nel paese?

C4. (*14 punti*) Hai una scacchiera 8 × 8 e un tassello come quello in figura formato accostando tre quadrati, ciascuno della stessa dimensione delle caselle della scacchiera. In quante posizioni diverse puoi sistemare il tassello sulla scacchiera, se vuoi che il tassello copra esattamente tre caselle della scacchiera? Attenzione: quelle che ti mostriamo come esempio sono due sistemazioni diverse, anche se sono ottenibili l'una dall'altra per rotazione.





C5. (*18 punti*) Qual è il più piccolo numero intero *k* maggiore di 1 che gode della seguente proprietà: ogni volta che l'intero *n* è somma di due quadrati perfetti, anche *kn* lo è?

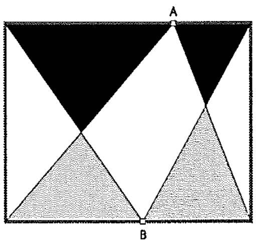
C6. (*22 punti*) Nel piano sono tracciate *n* circonferenze che individuano alcune regioni (ad esempio, per $n = 1$ ne vengono individuate due, una interna e una esterna. È sempre possibile, qualunque sia $n \geq 1$ e qualunque sia la posizione delle circonferenze, attribuire ad ognuna delle regioni individuate il colore rosso o il colore verde in modo che due regioni che hanno qualche arco di circonferenza in comune (non ridotto a un singolo punto) ricevano colori diversi?

LIVELLO CADET

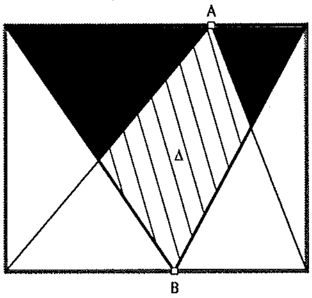
C1. (*5 punti*) Anna e Carlo si trovano in due punti diametralmente opposti del bordo di una fontana circolare. Iniziano a correre intorno alla fontana nello stesso verso e la velocità di Carlo è i 21/19 della velocità di Anna. Quando Carlo la raggiungerà, quanti giri o frazione di giro avrà fatto Anna attorno alla fontana?

Soluzione: 4 giri e tre quarti di giro.
Ad ogni giro di Anna, Carlo recupera i 2/19 = 4/38 della lunghezza di un giro. Per raggiungere Anna, Carlo deve recuperare metà, cioè i 19/38, della lunghezza di un giro: 19/4 = 4,75.

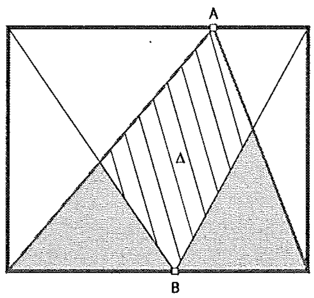
C2. (*7 punti*) Osserva la figura dove *A* e *B* sono due punti (diversi dai vertici) presi a caso su due lati opposti di un rettangolo. Dimostra che, indipendentemente dalla scelta di *A* e di *B*, la somma delle aree dei due triangoli neri coincide con la somma delle aree dei due triangoli grigi.



Soluzione:



Il triangolo ottenuto aggiungendo all'unione dei due triangoli neri il quadrilatero tratteggiato ha area uguale alla metà dell'area del rettangolo.
La stessa cosa è vera nella figura seguente

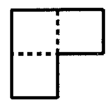


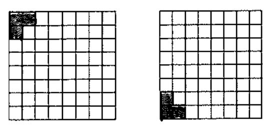
per il triangolo ottenuto aggiungendo all'unione dei due triangoli grigi il medesimo quadrilatero tratteggiato.

C3. (*11 punti*) In un paese 10 anni fa abitavano 2013 persone. Ognuna di queste persone era un veritiero, cioè diceva sempre la verità, oppure un bugiardo, cioè mentiva sempre. Un certo giorno, uno alla volta, tutti gli abitanti del paese hanno abbandonato il paese dicendo: "Dopo che me ne sarò andato io, in questo paese il numero dei veritieri sarà uguale al numero dei bugiardi". Quanti erano 10 anni fa i bugiardi abitanti nel paese?

Soluzione: 1006.
Chiaramente vi erano almeno 1006 bugiardi: tutti coloro che hanno lasciato il paese quando nel paese era rimasto un numero pari di abitanti. L'ultimo abitante ad abbandonare il paese è stato un veritiero: infatti dopo la sua partenza sono rimasti 0 veritieri e 0 bugiardi. Ma allora, essendo un bugiardo il penultimo, è un veritiero il terz'ultimo: iterando questo ragionamento fino al primo abitante che ha lasciato il paese, si conclude che sono veritieri tutti i 1007 abitanti che hanno lasciato il paese quando nel paese era rimasto un numero dispari di abitanti.

C4. (*14 punti*) Hai una scacchiera 8 × 8 e un tassello come quello in figura formato accostando tre quadrati, ciascuno della stessa dimensione delle caselle della scacchiera. In quante posizioni diverse puoi sistemare il tassello sulla scacchiera, se vuoi che il tassello copra esattamente tre caselle della scacchiera? Attenzione: quelle che ti mostriamo come esempio sono due sistemazioni diverse, anche se sono ottenibili l'una dall'altra per rotazione.





Soluzione: 196.
Ogni insieme di 4 caselle che, accostate, formino un quadrato può ospitare il tassello in quattro posizioni diverse. Gli insiemi di questo tipo sono 49, tanti quanti le coppie (7) di caselle adiacenti che ognuna delle prime 7 righe della scacchiera può ospitare.

C5. (*18 punti*) Qual è il più piccolo numero intero k maggiore di 1 che gode della seguente proprietà: ogni volta che l'intero n è somma di due quadrati perfetti, anche kn lo è?

Soluzione: 2.
È ovvio che se l'intero n è somma di due quadrati perfetti anche $4n$ lo è: quindi k non è maggiore di 4 e non può essere 3 per ovvi motivi di scomposizione in fattori primi. L'esempio $2(1 + 4) = 1 + 9$ suggerisce che k possa essere 2. In effetti, se $n = p^2 + q^2$, allora $2n = (p + q)^2 + (p - q)^2$.

C6. (*22 punti*) Nel piano sono tracciate n circonferenze che individuano alcune regioni (ad esempio, per $n = 1$ ne vengono individuate due, una interna e una esterna. È sempre possibile, qualunque sia $n \geq 1$ e qualunque sia la posizione delle circonferenze, attribuire ad ognuna delle regioni individuate il colore rosso o il colore verde in modo che due regioni che hanno qualche arco di circonferenza in comune (non ridotto a un singolo punto) ricevano colori diversi?

Soluzione: sì.
Associamo ad ognuna delle regioni individuate il numero dei cerchi a cui la regione appartiene. Se attribuiamo un colore ad ogni regione cui è associato un numero pari e l'altro colore ad ogni regione cui è associato un numero dispari, raggiungiamo lo scopo (infatti, passando da una regione ad una "adiacente" si passa dall'interno di un cerchio al suo esterno o viceversa, dunque cambia la parità del numero associato). Si può ottenere una dimostrazione anche procedendo per induzione su n.