



Kangourou della Matematica 2012
Coppa a squadre Kangourou
Semifinale turno A
Cervia, 5 maggio 2012



Quesiti

1. Numeri di quest'anno

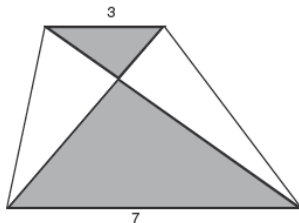
Quanti numeri interi positivi n sono tali che entrambi i numeri $n - 2012$ e $n + 2012$ siano numeri di quattro cifre?

2. Il triangolo rettangolo

Il triangolo ABC è rettangolo in A . La circonferenza con centro in A e passante per B interseca l'ipotenusa BC nel punto D : il segmento BD è lungo 20 centimetri e il segmento DC è lungo 16 centimetri. Quanto vale il quadrato della lunghezza del cateto AC ?

3. Il trapezio colorato

In figura vedete un trapezio, una parte del quale è stata colorata in grigio. La base maggiore del trapezio è lunga 7 metri, la base minore è lunga 3 metri. Quale percentuale della superficie del trapezio è rimasta bianca?



4. Aggiungendo due "1"

Stefano ha scritto un numero e poi ha aggiunto un 1 prima delle sue cifre e un altro 1 dopo le sue cifre (ad esempio, se la prima volta avesse scritto 17, avrebbe poi scritto 1171). Facendo la differenza fra il numero scritto la seconda volta e quello scritto la prima volta ottiene 14789. Che numero ha scritto la prima volta?

5. Una somma molto lunga

Sommate fra loro tutti i numeri di quattro cifre che si possono formare utilizzando solo le cifre 1, 2, 3 e 4, anche ripetute. Quali sono le prime quattro cifre del risultato che ottenete?

6. Rettangoli e quadrati

Un rettangolo di 112 cm di perimetro viene ritagliato in tre strisce parallele e ognuna di queste strisce viene tagliata in cinque parti: si ottengono così, senza avanzi, quindici quadrati tutti uguali fra loro. Quali sono le dimensioni (in centimetri) del rettangolo? (Scrivete di seguito la maggiore seguita dalla minore.)

7. L'orologio

Un orologio elettrico tradizionale ha il quadrante di 12 ore e le lancette, una per le ore e l'altra per i minuti, si muovono entrambe a scatti di un grado (il grado 0 corrisponde al raggio che collega il perno delle lancette al punto contrassegnato con 12). In questo istante le lancette sono scattate sulle 8:00. Fra quanti secondi per la prima volta le due lancette si troveranno sovrapposte?

8. Giulia pedala

Giulia vuole andare in bicicletta da un'amica che dista 18 Km da lei. Per telefono hanno concordato l'ora della visita, supponendo che Giulia impieghi un'ora per fare il viaggio. I primi 5 Km di strada però sono in leggera salita e, dopo averli percorsi, Giulia si accorge di avere pedalato alla velocità media di soli 10 Km all'ora. Se non vuole arrivare in ritardo e se nei rimanenti chilometri vuole tenere una velocità costante, di quanti chilometri all'ora dovrà essere questa velocità?

9. Cubo e triangoli

Assegnato un cubo, quanti diversi triangoli rettangoli si possono individuare che abbiano come vertici tre dei vertici del cubo?

10. Numeri speciali

Quanti numeri interi compresi fra 200 e 999 sono tali che, moltiplicando la cifra delle unità per quella delle decine, si ottiene la cifra delle centinaia?

11. Shopping

Carlo e otto suoi amici hanno acquistato alcuni oggetti. Gli amici di Carlo hanno speso in media 82 euro ciascuno; Carlo ha speso 64 euro più della media di quanto hanno speso Carlo e i suoi otto amici. Quanti euro ha speso Carlo?

12. Un parco molto visitato

All'ingresso di un parco c'è un tornello che conta gli ingressi, fin dalla sua fondazione. Dopo l'ingresso di Paolo il tornello segna 31879564, che è un numero formato da cifre tutte diverse fra loro: la prossima volta che il numero di ingressi sarà ancora costituito da cifre tutte diverse fra loro, quanti visitatori saranno entrati dopo Paolo?

13. Il ricavo

Il guadagno ed il ricavo (in euro) di una vendita sono due numeri di tre cifre ciascuno. Per questi due numeri la cifra delle decine è la stessa, mentre quelle delle unità e delle centinaia sono scambiate fra loro. Moltiplicando i due numeri si ottiene 71685. Quanto è il ricavo?

14. Il resto non cambia

Se dividete 1059, 1417 e 2312 per un certo intero n maggiore di 1 ottenete sempre lo stesso resto. Qual è il numero n ?

15. Le ultime tre cifre

Qual è il più piccolo numero intero positivo n tale che le ultime tre cifre del prodotto $3999 \times n$ siano 888?



Kangourou della Matematica 2012
Coppa a squadre Kangourou
Semifinale turno A
Cervia, 5 maggio 2012



Quesiti e risposte

1. Numeri di quest'anno

Quanti numeri interi positivi n sono tali che entrambi i numeri $n - 2012$ e $n + 2012$ siano numeri di quattro cifre?

[4976] Sono tutti e soli gli interi da 3012 a 7987 compresi: $7987 - 3011 = 4976$.

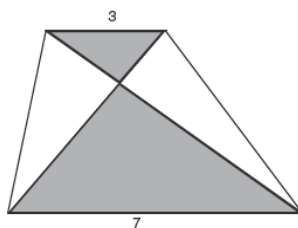
2. Il triangolo rettangolo

Il triangolo ABC è rettangolo in A . La circonferenza con centro in A e passante per B interseca l'ipotenusa BC nel punto D : il segmento BD è lungo 20 centimetri e il segmento DC è lungo 16 centimetri. Quanto vale il quadrato della lunghezza del cateto AC ?

[0936] Sia H il piede dell'altezza relativa al lato BD nel triangolo (isoscele) ABD . I triangoli rettangoli ABC e HAC sono simili quindi $\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{HC}$ da cui $\overline{AC}^2 = 36 \times 26 = 936$.

3. Il trapezio colorato

In figura vedete un trapezio, una parte del quale è stata colorata in grigio. La base maggiore del trapezio è lunga 7 metri, la base minore è lunga 3 metri. Quale percentuale della superficie del trapezio è rimasta bianca?



[0042] Detta h l'altezza del trapezio, l'area della regione grigia è $\frac{7 \times \frac{7}{10} h}{2} + \frac{3 \times \frac{3}{10} h}{2} = \frac{58}{20} h$ mentre l'area del trapezio è $\frac{(7+3)}{2} h = \frac{10}{2} h$ e il loro rapporto è $\frac{58}{100}$; è bianco il 42% del trapezio.

4. Aggiungendo due "1"

Stefano ha scritto un numero e poi ha aggiunto un 1 prima delle sue cifre e un altro 1 dopo le sue cifre (ad esempio, se la prima volta avesse scritto 17, avrebbe poi scritto 1171). Facendo la differenza fra il numero scritto la seconda volta e quello scritto la prima volta ottiene 14789. Che numero ha scritto la prima volta?

[0532] Calcolando $1abc1 = abc + 14789$ si ha $c = 2$, $b = 3$ e $a = 5$.

5. Una somma molto lunga

Sommate fra loro tutti i numeri di quattro cifre che si possono formare utilizzando solo le cifre 1, 2, 3 e 4, anche ripetute. Quali sono le prime quattro cifre del risultato che ottenete?

[7110] Potendo ripetere le cifre, esistono 4^3 numeri che hanno 1 come cifra delle migliaia, 4^3 numeri che hanno 2 come cifra delle migliaia, ecc.; analogamente esistono 4^3 numeri che hanno 1 come cifra delle centinaia, 4^3 numeri che hanno 2 e così via fino alle unità. Il numero cercato è $4^3 \times ((1000 + 2000 + 3000 + 4000) + (100 + 200 + 300 + 400) + (10 + 20 + 30 + 40) + (1 + 2 + 3 + 4)) = 4^3 \times 11110 = 711040$.

6. Rettangoli e quadrati

Un rettangolo di 112 cm di perimetro viene ritagliato in tre strisce parallele e ognuna di queste strisce viene tagliata in cinque parti: si ottengono così, senza avanzi, quindici quadrati tutti uguali fra loro. Quali sono le dimensioni (in centimetri) del rettangolo? (Scrivete di seguito la maggiore seguita dalla minore.)

[3521] Detta l la lunghezza del lato dei quadrati, le dimensioni del rettangolo sono $3l$ e $5l$ e la loro somma è 56; l è 7 e i lati del rettangolo misurano 35 cm. e 21 cm.

7. L'orologio

Un orologio elettrico tradizionale ha il quadrante di 12 ore e le lancette, una per le ore e l'altra per i minuti, si muovono entrambe a scatti di un grado (il grado 0 corrisponde al raggio che collega il perno delle lancette al punto contrassegnato con 12). In questo istante le lancette sono scattate sulle 8:00. Fra quanti secondi per la prima volta le due lancette si troveranno sovrapposte?

[2610] Un angolo di 30° corrisponde a un'ora per la lancetta delle ore, che quindi fa uno scatto ogni 2 minuti, e corrisponde a 5 minuti, cioè a 300 secondi, per la lancetta dei minuti, che fa uno scatto ogni 10 secondi. Alla partenza la lancetta delle ore è sui 240° e quella dei minuti su 0° . La lancetta dei minuti sarà sui 240° dopo 2400 secondi, cioè 40 minuti, e nel frattempo la lancetta delle ore è avanzata di 20° portandosi a 260° . In altri 200 secondi la lancetta dei minuti sarà a 260° e quella delle ore sarà da 80 secondi sui 261° . Dopo 10 secondi la lancetta dei minuti raggiungerà i 261° sovrapponendosi a quella delle ore. In totale $2400+200+10=2610$ secondi.

8. Giulia pedala

Giulia vuole andare in bicicletta da un'amica che dista 18 Km da lei. Per telefono hanno concordato l'ora della visita, supponendo che Giulia impieghi un'ora per fare il viaggio. I primi 5 Km di strada però sono in leggera salita e, dopo averli percorsi, Giulia si accorge di avere pedalato alla velocità media di soli 10 Km all'ora. Se non vuole arrivare in ritardo e se nei rimanenti chilometri vuole tenere una velocità costante, di quanti chilometri all'ora dovrà essere questa velocità?

[0026] Giulia ha impiegato mezz'ora per fare i primi 5 Km; nella mezz'ora restante deve percorrere 13 Km e quindi deve andare a 26 Km all'ora.

9. Cubo e triangoli

Assegnato un cubo, quanti diversi triangoli rettangoli si possono individuare che abbiano come vertici tre dei vertici del cubo?

[0048] Osserviamo che ho 56 modi diversi di scegliere tre vertici distinti di un cubo e quindi di formare dei triangoli: infatti scelto il primo vertice in uno degli 8 modi possibili, posso scegliere il secondo tra i 7 vertici rimasti e il terzo tra i 6 rimasti per un totale di $8 \times 7 \times 6$ scelte; in questo modo però ogni triangolo è stato contato 6 volte, due per ciascun vertice, corrispondenti al diverso ordine di scelta degli altri due vertici. I triangoli così formati sono rettangoli o equilateri, e sono equilateri solo quelli che hanno i vertici a due a due equidistanti, quindi coppie di vertici opposti su una stessa

faccia. Ogni vertice appartiene esattamente a 3 triangoli equilateri, e quindi 8 triangoli sono equilateri e i rimanenti 48 rettangoli.

10. Numeri speciali

Quanti numeri interi compresi fra 200 e 999 sono tali che, moltiplicando la cifra delle unità per quella delle decine, si ottiene la cifra delle centinaia?

[0022] Fissata la cifra delle centinaia (in prima riga) ho le scelte indicate in seconda e terza riga per le altre due cifre.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 7 | 7 | 8 | 8 | 8 | 8 | 9 | 9 | 9 |
| 1 | 2 | 1 | 3 | 1 | 2 | 4 | 1 | 5 | 1 | 2 | 3 | 6 | 1 | 7 | 1 | 2 | 4 | 8 | 1 | 3 | 9 |
| 2 | 1 | 3 | 1 | 4 | 2 | 1 | 5 | 1 | 6 | 3 | 2 | 1 | 7 | 1 | 8 | 4 | 2 | 1 | 9 | 3 | 1 |

11. Shopping

Carlo e otto suoi amici hanno acquistato alcuni oggetti. Gli amici di Carlo hanno speso in media 82 euro ciascuno; Carlo ha speso 64 euro più della media di quanto hanno speso Carlo e i suoi otto amici. Quanti euro ha speso Carlo?

[0154] Detta x la spesa di Carlo, abbiamo $\frac{82 \times 8 + x}{9} + 64 = x$ da cui $x = 154$.

12. Un parco molto visitato

All'ingresso di un parco c'è un tornello che conta gli ingressi, fin dalla sua fondazione. Dopo l'ingresso di Paolo il tornello segna 31879564, che è un numero formato da cifre tutte diverse fra loro: la prossima volta che il numero di ingressi sarà ancora costituito da cifre tutte diverse fra loro, quanti visitatori saranno entrati dopo Paolo?

[0038] Naturalmente per avere il più piccolo numero più grande di quello assegnato e con cifre tutte diverse modifichiamo solo le ultime tre cifre; possiamo usare le cifre 0 e 2 che non sono ancora state utilizzate e otteniamo 31879602.

13. Il ricavo

Il guadagno ed il ricavo (in euro) di una vendita sono due numeri di tre cifre ciascuno. Per questi due numeri la cifra delle decine è la stessa, mentre quelle delle unità e delle centinaia sono scambiate fra loro. Moltiplicando i due numeri si ottiene 71685. Quanto è il ricavo?

[0531] Poiché la cifra finale del prodotto è 5, uno dei due ha 5 come ultima cifra, e l'altro la avrà come prima; la cifra finale di quest'ultimo è 1: infatti deve essere dispari e minore di 3 perché altrimenti i due numeri sarebbero maggiori, rispettivamente, di 300 e 500 e il loro prodotto sarebbe maggiore di 150000. I numeri sono allora della forma $1a5$ e $5a1$ e si ha $71685 = 5 \times 10^4 + (2 + 6a) \times 10^3 + (6 + a^2) \times 10^2 + 6a \times 10 + 5$. Basta osservare che la cifra delle decine può essere 8 solo se a è 3 oppure 8, ed escludere 8 che darebbe un numero maggiore (per i primi due addendi) di 100000. I numeri sono allora 135 e 531, e il ricavo è il maggiore.

14. Il resto non cambia

Se dividete 1059, 1417 e 2312 per un certo intero n maggiore di 1 ottenete sempre lo stesso resto. Qual è il numero n ?

[0179] Poiché il resto è sempre lo stesso, deve essere divisibile per n ciascuna delle differenze tra una coppia di numeri. Si ha $2312 - 1417 = 895 = 5 \times 179$ e $1417 - 1059 = 358 = 2 \times 179$ (la terza differenza è la somma delle prime due), con 179 numero primo. Il numero cercato è 179.

15. Le ultime tre cifre

Qual è il più piccolo numero intero positivo n tale che le ultime tre cifre del prodotto $3999 \times n$ siano 888?

[0112] L'ultima cifra deve essere 2; $3999 \times 2 = 7998$ quindi siamo a posto con la cifra delle unità. Per avere 8 sulle decine sommo 3999×10 a 7998 ottenendo 47988 e analogamente per ottenere 8 sulle centinaia sommo 3999×100 a 47988. Il numero cercato è 112.