Kangourou della Matematica 2012
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 7 maggio 2012

LIVELLO ÉCOLIER

E1. (*5 punti*) **Tutti i ragazzi della classe di Luigi e Michele si sono messi in fila. Dietro a Luigi ci sono 16 ragazzi: Michele è uno di essi. Davanti a Michele ci sono 14 ragazzi: Luigi è uno di essi. Fra Luigi e Michele ci sono 7 ragazzi (senza contare Luigi e Michele). Quanti ragazzi ci sono in quella classe?**

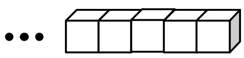
E2. (*7 punti*) **In una fotografia compaiono quattro orologi: uno segna le 4:45, un altro le 5.05, un altro ancora le 5:25 e l'ultimo le 5:40. Si sa che, quando è stata scattata la fotografia, due di essi erano fermi, mentre gli altri due marciavano alla giusta velocità, ma uno era avanti di 20 minuti e l'altro era indietro di 20 minuti. A che ora è stata scattata la fotografia?**

E3. (*11 punti*) **Elena ha 20 biglie, ognuna colorata con uno e uno solo dei seguenti colori: verde, rosso, blu, marrone. 17 non sono verdi, 5 sono rosse, 12 non sono blu. Quante sono le biglie marroni?**

E4. (*14 punti*) **Se si moltiplicano fra di loro tutti numeri interi dispari compresi fra 1 e 2012, con quale cifra termina il prodotto?**

E5. (*18 punti*) **La figura, tracciata su un foglio a quadretti, rappresenta un canguro. Vuoi ritagliarlo in modo da ottenere soltanto triangoli. Qual è il minimo numero di triangoli che puoi ottenere?**

E6. (*22 punti*) **Pietro vuole mettere in fila un certo numero di dadi tradizionali (la somma dei punti su facce opposte è sempre 7), come ti mostra la figura.**



Incolla due facce insieme solo se il numero di punti sulle due facce è uguale, e vuole ottenere una fila in modo che la somma dei punti su tutte le facce visibili sia 100. Può riuscirci? Se sì, quanti dadi deve usare? Se no, perché?

LIVELLO ÉCOLIER

Per ciascun quesito, riporta la soluzione insieme ad una breve giustificazione nello spazio disponibile (se necessario, puoi utilizzare anche il retro del foglio).

E1. (*5 punti*) Tutti i ragazzi della classe di Luigi e Michele si sono messi in fila. Dietro a Luigi ci sono 16 ragazzi: Michele è uno di essi. Davanti a Michele ci sono 14 ragazzi: Luigi è uno di essi. Fra Luigi e Michele ci sono 7 ragazzi (senza contare Luigi e Michele). Quanti ragazzi ci sono in quella classe?

Soluzione: 23.
Dietro a Michele ci sono 16 – 8 = 8 ragazzi (i 7 tra Luigi e Michele e Michele stesso); davanti ce ne sono 14 e quindi in totale i ragazzi sono 14 +1 + 8.

E2. (*7 punti*) In una fotografia compaiono quattro orologi: uno segna le 4:45, un altro le 5:05, un altro ancora le 5:25 e l'ultimo le 5:40. Si sa che, quando è stata scattata la fotografia, due di essi erano fermi, mentre gli altri due, pur marciando alla giusta velocità, erano uno avanti di 20 minuti e l'altro indietro di 20 minuti. A che ora è stata scattata la fotografia?

Soluzione: alle 5:05.
Se tra gli orologi non fermi uno è avanti di 20 minuti e l'altro è indietro di 20 minuti, si deve cercare la coppia di orologi "funzionanti" tra quelli che indicano ore differenti di 40 minuti. Ciò si verifica solo per il primo e il terzo e quindi l'ora esatta si trova togliendo 20 minuti alle 5:25.

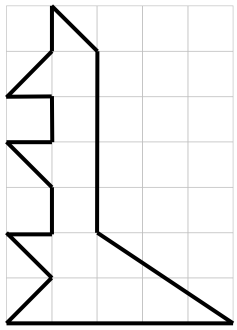
E3. (*11 punti*) Elena ha 20 biglie, ognuna colorata con uno e uno solo dei seguenti colori: verde, rosso, blu, marrone. 17 non sono verdi, 5 sono rosse, 12 non sono blu. Quante sono le biglie marroni?

Soluzione: 4.
Le 12 biglie non blu sono marroni o rosse o verdi; le rosse sono 5, le verdi sono 20 – 17 = 3 e quindi le marroni sono 12 – 3 – 5 = 4.

E4. (*14 punti*) Se si moltiplicano fra di loro tutti numeri interi dispari compresi fra 1 e 2012, con quale cifra termina il prodotto?

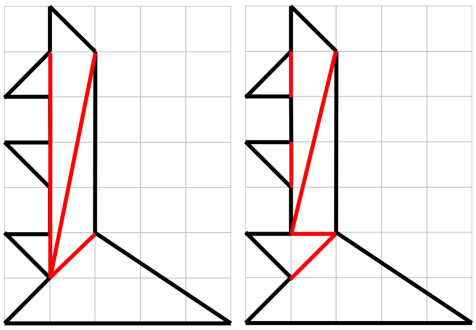
Soluzione: 5.

Tra i dispari compresi tra 1 e 2012 c'è 5. Se uno dei fattori di un prodotto è 5, la cifra delle unità del prodotto può essere solo 0 o 5. D'altra parte nel prodotto non ci sono fattori pari e quindi tale cifra non può essere 0.

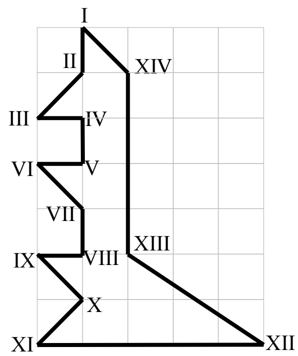


E5. (*18 punti*) La figura, tracciata su un foglio a quadretti, rappresenta un canguro. Vuoi ritagliarlo in modo da ottenere soltanto triangoli. Qual è il minimo numero di triangoli che puoi ottenere?

Soluzione:6.



In figura sono mostrate due possibili suddivisioni in 6 triangoli: altre due si ottengono ad esempio scegliendo l'altra diagonale del trapezio.



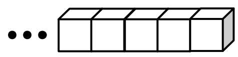
Mostriamo che non è possibile scomporre la figura in meno di 6 triangoli. Numeriamo i 14 vertici della figura (che è un poligono non convesso) partendo dall'unico vertice in alto, in verso antiorario: I, II, III, …

I vertici I, III, VI, IX, XI devono appartenere a triangoli diversi poiché la parte di figura contenente due o più di essi non è convessa: quindi ci sono almeno 5 triangoli. Inoltre comunque si ricavino questi triangoli, rimangono parti di canguro scoperte.

In modo più formale, ma certo non richiesto ai nostri concorrenti, si può osservare che:

- gli angoli interni corrispondenti ai 14 vertici misurano nell'ordine: 45°, 225°, 45°, 270°, 270°, 45°, 225°, 270°, 45°, 270°, 45°, α° (con $30<\alpha<45$),($270-\alpha$)°, 135° e quindi la somma delle loro misure è 360° x 6, pari a 12 angoli piatti;
- questi angoli, eventualmente frazionati tra vari triangoli, devono andare a costituire gli angoli interni dei triangoli in cui si scompone il poligono o essere "assorbiti" come spiegato al punto successivo;
- i vertici <I, II, IV, V, VII, VIII, X> e i vertici <X, XI, XIII> risultano allineati: pensare in ciascun caso che uno dei triangoli abbia per lato il segmento che li contiene permette di eliminare dal conteggio un po' di angoli piatti (5 nel primo caso, 1 nel secondo)
- restano quindi da distribuire in triangoli 6 angoli piatti e visto che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto di vede che sono necessari almeno 6 triangoli.

E6. (*22 punti*) Pietro vuole mettere in fila un certo numero di dadi tradizionali (la somma dei punti su facce opposte è sempre 7), come ti mostra la figura.



Incolla due facce insieme solo se il numero di punti sulle due facce è uguale, e vuole ottenere una fila in modo che la somma dei punti su tutte le facce visibili sia 100. Può riuscirci? Se sì, quanti dadi deve usare? Se no, perché?

Soluzione: non può riuscirci.
Le facce laterali contribuiscono per ogni dado con 14 punti e in più i due dadi estremi contribuiscono con la somma dei punti sulle due facce terminali, una per ciascun dado. Poiché si incollano facce con lo stesso punteggio, se il numero di dadi è dispari (e quindi il numero di incollature è pari) le due facce estreme avranno punteggi a somma 7, se il numero di dadi è pari (e quindi il numero di incollature è dispari) le due facce estreme avranno lo stesso punteggio e quindi contribuiranno con $2n$ punti (n = 1, 2, 3, 4, 5, 6). Poiché dividendo 100 per 14 si ha quoziente 7 (e resto 2), la somma 100 non può essere ottenuta.