



Kangourou della Matematica 2012  
finale nazionale italiana



Mirabilandia, 7 maggio 2012

**LIVELLO BENJAMIN**

- B1.** (5 punti) In una fotografia compaiono quattro orologi: uno segna le 4:45, un altro le 5.05, un altro ancora le 5:25 e l'ultimo le 5:40. Si sa che, quando è stata scattata la fotografia, due di essi erano fermi, mentre gli altri due marciavano alla giusta velocità, ma uno era avanti di 20 minuti e l'altro era indietro di 20 minuti. A che ora è stata scattata la fotografia?
- B2.** (7 punti) Elena ha 20 biglie, ognuna colorata con uno e uno solo dei seguenti colori: verde, rosso, blu, marrone. 17 non sono verdi, 5 sono rosse, 12 non sono blu. Quante sono le biglie marroni?
- B3.** (11 punti) Se si moltiplicano fra di loro tutti numeri interi dispari compresi fra 1 e 2012, con quale cifra termina il prodotto?
- B4.** (14 punti) La figura, tracciata su un foglio a quadretti, rappresenta un canguro. Vuoi ritagiarlo in modo da ottenere soltanto triangoli. Qual è il minimo numero di triangoli che puoi ottenere?
- B5.** (18 punti) Pietro vuole mettere in fila un certo numero di dadi tradizionali (la somma dei punti su facce opposte è sempre 7), come ti mostra la figura. Incolla due facce insieme solo se il numero di punti sulle due facce è uguale, e vuole ottenere una fila in modo che la somma dei punti su tutte le facce esposte sia 2012. Può riuscirci e, in caso affermativo, quanti dadi deve usare?



- B6.** (22 punti) Maurizio si trova in un grattacielo di 99 piani, ma non si ricorda a che piano è. Il sistema per chiamare l'ascensore è inusuale. Ogni piano dispone di una pulsantiera con tasti dallo 0 al 99: premendo un pulsante l'ascensore raggiungerà il piano corrispondente al numero riportato sul tasto, ma rimarrà occupato, qualunque sia il piano, per il tempo necessario a percorrere 99 piani. Considerando che Maurizio può vedere dal vetro della porta se l'ascensore passa per il suo piano e che ora l'ascensore è al piano 0, qual è il numero minimo di pulsanti premendo i quali avrà la garanzia di sapere a che piano si trova?



Kangourou della Matematica 2012  
finale nazionale italiana  
Mirabilandia, 7 maggio 2012



**LIVELLO BENJAMIN**

*Per ciascun quesito, riporta la soluzione insieme ad una breve giustificazione nello spazio disponibile (se necessario, puoi utilizzare anche il retro del foglio).*

**B1. (5 punti)** In una fotografia compaiono quattro orologi: uno segna le 4:45, un altro le 5:05, un altro ancora le 5:25 e l'ultimo le 5:40. Si sa che, quando è stata scattata la fotografia, due di essi erano fermi, mentre gli altri due, pur marciando alla giusta velocità, erano uno avanti di 20 minuti e l'altro indietro di 20 minuti. A che ora è stata scattata la fotografia?

**Soluzione:** alle 5:05.

Se tra gli orologi non fermi uno è avanti di 20 minuti e l'altro è indietro di 20 minuti, si deve cercare la coppia di orologi "funzionanti" tra quelli che indicano ore differenti di 40 minuti. Ciò si verifica solo per il primo e il terzo e quindi l'ora esatta si trova togliendo 20 minuti alle 5:25.

**B2. (7 punti)** Elena ha 20 biglie, ognuna colorata con uno e uno solo dei seguenti colori: verde, rosso, blu, marrone. 17 non sono verdi, 5 sono rosse, 12 non sono blu. Quante sono le biglie marroni?

**Soluzione:** 4.

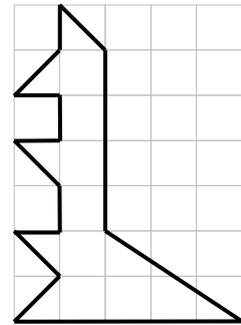
Le 12 biglie non blu sono marroni o rosse o verdi; le rosse sono 5, le verdi sono  $20 - 17 = 3$  e quindi le marroni sono  $12 - 3 - 5 = 4$ .

**B3. (11 punti)** Se si moltiplicano fra di loro tutti numeri interi dispari compresi fra 1 e 2012, con quale cifra termina il prodotto?

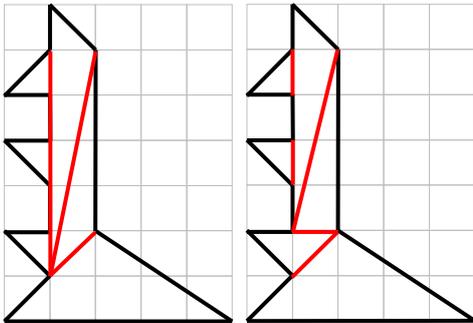
**Soluzione:** 5.

Tra i dispari compresi tra 1 e 2012 c'è 5. Se uno dei fattori di un prodotto è 5, la cifra delle unità del prodotto può essere solo 0 o 5. D'altra parte nel prodotto non ci sono fattori pari e quindi tale cifra non può essere 0.

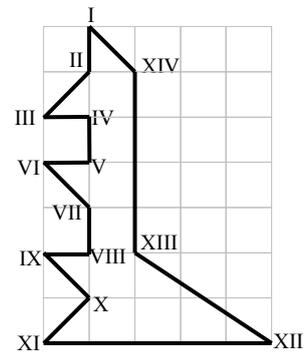
**B4. (14 punti)** La figura, tracciata su un foglio a quadretti, rappresenta un canguro. Vuoi ritagliarlo in modo da ottenere soltanto triangoli. Qual è il minimo numero di triangoli che puoi ottenere?



**Soluzione:6.**



In figura sono mostrate due possibili suddivisioni in 6 triangoli: altre due si ottengono ad esempio scegliendo l'altra diagonale del trapezio.

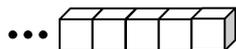


Mostriamo che non è possibile scomporre la figura in meno di 6 triangoli. Numeriamo i 14 vertici della figura (che è un poligono non convesso) partendo dall'unico vertice in alto, in verso antiorario: I, II, III, ...

I vertici I, III, VI, IX, XI devono appartenere a triangoli diversi poiché la parte di figura contenente due o più di essi non è convessa: quindi ci sono almeno 5 triangoli. Inoltre comunque si ricavino questi triangoli, rimangono parti di canguro scoperte. In modo più formale, ma certo non richiesto ai nostri concorrenti, si può osservare che:

- gli angoli interni corrispondenti ai 14 vertici misurano nell'ordine:  $45^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $225^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $270^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $\alpha^\circ$  (con  $30 < \alpha < 45$ ),  $(270 - \alpha)^\circ$ ,  $135^\circ$  e quindi la somma delle loro misure è  $360^\circ \times 6$ , pari a 12 angoli piatti;
- questi angoli, eventualmente frazionati tra vari triangoli, devono andare a costituire gli angoli interni dei triangoli in cui si scompone il poligono o essere "assorbiti" come spiegato al punto successivo;
- i vertici  $\langle I, II, IV, V, VII, VIII, X \rangle$  e i vertici  $\langle X, XI, XIII \rangle$  risultano allineati: pensare in ciascun caso che uno dei triangoli abbia per lato il segmento che li contiene permette di eliminare dal conteggio un po' di angoli piatti (5 nel primo caso, 1 nel secondo)
- restano quindi da distribuire in triangoli 6 angoli piatti e visto che la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto si vede che sono necessari almeno 6 triangoli.

**B5.** (18 punti) Pietro vuole mettere in fila un certo numero di dadi tradizionali (la somma dei punti su facce opposte è sempre 7), come ti mostra la figura.



Incolla due facce insieme solo se il numero di punti sulle due facce è uguale, e vuole ottenere una fila in modo che la somma dei punti su tutte le facce esposte sia 2012. Può riuscirci e, in caso affermativo, quanti dadi deve usare?

**Soluzione:** non può riuscirci.

Le facce laterali contribuiscono per ogni dado con 14 punti e in più i due dadi estremi contribuiscono con la somma dei punti sulle due facce terminali, una per ciascun dado. Poiché si incollano facce con lo stesso punteggio, se il numero di dadi è dispari (e quindi il numero di incollature è pari) le due facce estreme avranno punteggi a somma 7, se il numero di dadi è pari (e quindi il numero di incollature è dispari) le due facce estreme avranno lo stesso punteggio e quindi contribuiranno con  $2n$  punti ( $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ). Poiché dividendo 2012 per 14 si ha quoziente 143 (e resto 10), la somma 2012 non può essere ottenuta.

**B6.** (22 punti) Maurizio si trova in un grattacielo di 99 piani, ma non si ricorda a che piano è. Il sistema per chiamare l'ascensore è inusuale. A ogni piano è presente una pulsantiera con tasti dallo 0 al 99: premendo un pulsante l'ascensore raggiungerà il piano corrispondente al numero riportato sul tasto, ma risulterà occupato, per un tempo che non è correlato in alcun modo con il percorso compiuto. Considerando che Maurizio può vedere dal vetro della porta se l'ascensore passa per il suo piano e che ora l'ascensore è al piano 0, qual è il numero minimo di pulsanti premendo i quali avrà la garanzia di sapere a che piano si trova?

**Soluzione:** 6

Maurizio non si trova al piano 0 altrimenti vedrebbe l'ascensore fermo. Allora può procedere in questo modo. Inizia a premere il tasto **50**: se l'ascensore si ferma al suo piano conclude di essere al piano 50. Se vede passare l'ascensore si troverà tra il piano 1 e il piano 49, altrimenti tra il piano 51 e il piano 99: come prima, la strategia consiste nel premere il tasto corrispondente al piano che si trova a metà tra il primo e l'ultimo in cui può trovarsi Maurizio e, dato che le due situazioni sono simmetriche, possiamo supporre che Maurizio si trovi tra il piano 1 e il piano 49. Preme quindi il tasto **25**: se l'ascensore si ferma al suo piano conclude di essere al piano 25. Se non vede passare l'ascensore e quindi scopre di trovarsi tra il piano 1 e il piano 24 preme il tasto **13**: il caso peggiore si presenta se scopre di trovarsi tra il piano 1 e il piano 12 (12 piani invece di 11). Iterando il ragionamento e supponendo che si presenti sempre il peggiore dei casi, i tasti da premere saranno il **7**, poi il **4**, poi il **2**.