Kangourou della Matematica 2011
Coppa a squadre Kangourou - finale
Mirabilandia, 8 maggio 2011

Quesiti

1. **Anna e il suo orologio**

Anna si diverte a calcolare la somma delle cifre che appaiono sul suo orologio digitale: ad esempio, se l'orologio indica 21:17, Anna ottiene 11. Qual è la somma più alta che Anna può ottenere?

2. **Gli spigoli di un cubo**

Quante coppie di rette sghembe (cioè non giacenti su uno stesso piano) si possono formare, scegliendo le rette fra quelle su cui giacciono gli spigoli di un cubo?

3. **La somma cifrata**

Nella somma cifrata

A + AP + APP = PQA

le lettere A, P e Q indicano ciascuna una cifra; lettere diverse indicano cifre diverse. Che numero è PAPA?

4. **Il torneo di tennis**

Un torneo di tennis procede per eliminazione diretta. Due giocatori si affrontano: chi vince prosegue, chi perde viene eliminato. Ad ogni fase gli accoppiamenti vengono decisi per sorteggio: se, in una qualunque fase, il numero dei giocatori è dispari, l'ultimo rimasto al termine dei sorteggi prosegue automaticamente alla fase successiva. A conti fatti, per designare il vincitore, si devono giocare complessivamente 100 partite. Quanti sono i giocatori che partecipano al torneo?

5. **Niente numeri consecutivi**

Sia A l'insieme formato dai primi 11 numeri interi positivi, cioè $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10, 11\}$. Quanti sono i sottoinsiemi di A, formati da almeno due elementi, che non contengono due numeri consecutivi?

6. **Il quadrato perfetto**

Un numero intero di 6 cifre è un quadrato perfetto, è un multiplo di 27, la sua cifra delle unità è 0 e quella delle centinaia è 5. Quanto vale la sua radice quadrata?

7. **L'auto di Marco**

Il contachilometri dell'auto di Marco ha 6 cifre. Marco sta guidando e nota che in questo momento sul suo contachilometri appare un numero formato solo dalle cifre 1 e 2 e che il numero che apparirà fra 9 chilometri sarà ancora formato solo dalle cifre 1 e 2. Quanti sono i numeri che potrebbero apparire fra 9 chilometri?

8. **Numeri di 7 cifre**

Quanti numeri interi positivi di 7 cifre significative (cioè la cui prima cifra non sia 0) contengono il blocco di cifre 2011 come parte della loro rappresentazione decimale (si intende che le cifre del blocco devono apparire consecutivamente)?

9. I due corridori
Due corridori, Marco e Felice, devono effettuare un percorso comune: Marco dal punto A al punto B, Felice dal punto B al punto A. Essi partono nello stesso istante e ognuno tiene costante la propria velocità. Quando Marco è a metà strada, a Felice manca un'ora e mezza per arrivare; quando Felice è a metà strada, a Marco mancano tre quarti d'ora per arrivare. Quanti minuti impiega Felice in più di Marco per completare il percorso?

10. Uno strano ascensore
In un albergo di 20 piani i primi dieci sono dipinti di verde, quelli dall'undicesimo al ventesimo sono dipinti di rosso. L'albergo non ha scale e per cambiare piano si può usare solo uno strano ascensore che si comporta nel modo seguente. Chi entra nell'ascensore in un piano verde è sicuro di essere portato al piano che desidera. Chi entra nell'ascensore in un piano rosso è portato in un piano dello stesso colore di quello che ha selezionato, ma non necessariamente nel piano selezionato; in ogni caso, l'ascensore cambia piano. Da qualunque piano venga chiamato, l'ascensore vi arriva appena libero. Una cameriera deve visitare tutti i piani, partendo dal primo e ritornandovi. Se l'ascensore si comporta nel modo a lei più sfavorevole, qual è il minimo numero di viaggi che le consente di raggiungere lo scopo?

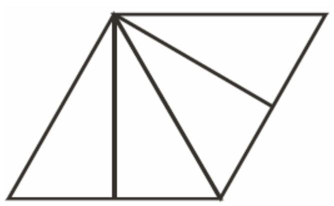
11. Il numero più piccolo
Qual è il più piccolo numero intero maggiore di 1 che non può essere scritto nella forma
$a \times b + c$ dove a, b e c sono cifre tutte diverse fra loro?

12. Nonno Angelo
Nonno Angelo, che non è ancora centenario, oggi dice: "La mia età (espressa da un numero intero di anni) fra un anno sarà un multiplo di 2, fra due anni un multiplo di 3, fra tre anni un multiplo di 4, fra quattro anni un multiplo di 5". Quanti anni ha oggi nonno Angelo?

13. Una potenza di due
Sapete che $2^n = 134.217.728$. Quanto vale n ?

14. I comple-giorni
Scegliendo tre persone diverse a caso, qual è la probabilità che almeno due di esse siano nate nello stesso giorno della settimana (non importa quale)? Il risultato è un numero compreso fra 0 e 1: scrivete, nell'ordine, solo le sue prime quattro cifre decimali (cioè le prime quattro a destra della virgola).

15. Gli angoli del rombo
In figura vedete un rombo formato accostando quattro triangoli rettangoli fra loro congruenti. Quanti gradi misura ciascuno degli angoli acuti del rombo?



Kangourou della Matematica 2011
Coppa a squadre Kangourou - finale
Mirabilandia, 8 maggio 2011

Quesiti e soluzioni

1. Anna e il suo orologio

Anna si diverte a calcolare la somma delle cifre che appaiono sul suo orologio digitale: ad esempio, se l'orologio indica 21:17, Anna ottiene 11. Qual è la somma più alta che Anna può ottenere?

[0024] Quella che si determina alle 19:59.

2. Gli spigoli di un cubo

Quante coppie di rette sghembe (cioè non giacenti su uno stesso piano) si possono formare, scegliendo le rette fra quelle su cui giacciono gli spigoli di un cubo?

[0024] Osserviamo un cubo dall'alto. Ciascuno dei 4 spigoli della faccia superiore è accoppiabile (con lo scopo di generare due rette sghembe) a ciascuno dei due spigoli verticali che non incontra, per un totale di 8 coppie diverse fra loro. La stessa cosa accade per ciascuno dei 4 spigoli della faccia inferiore che generano quindi altre 8 coppie diverse fra loro e diverse da ciascuna delle precedenti. Così facendo abbiamo esaurito le coppie in cui entrano in gioco gli spigoli verticali. Rimangono le 8 coppie generate associando ad ogni spigolo della faccia superiore i due spigoli ad esso non paralleli dell'altra faccia (scambiando i ruoli delle due facce si ottengono le stesse 8 coppie).

3. La somma cifrata

Nella somma cifrata

$$A + AP + APP = PQA$$

le lettere A, P e Q indicano ciascuna una cifra; lettere diverse indicano cifre diverse. Che numero è PAPA?

[5454] P + P deve dare 0 oppure 10: se P fosse 0, il risultato finale sarebbe AAA, dunque P vale 5. Tenendo conto del riporto 1 nella somma delle cifre delle unità, segue subito che deve essere $A = P - 1 = 4$.

4. Il torneo di tennis

Un torneo di tennis procede per eliminazione diretta. Due giocatori si affrontano: chi vince prosegue, chi perde viene eliminato. Ad ogni fase gli accoppiamenti vengono decisi per sorteggio: se, in una qualunque fase, il numero dei giocatori è dispari, l'ultimo rimasto al termine dei sorteggi prosegue automaticamente alla fase successiva. A conti fatti, per designare il vincitore, si devono giocare complessivamente 100 partite. Quanti sono i giocatori che partecipano al torneo?

[0101] La centesima partita (la finale) viene certamente giocata fra due giocatori. Alle semifinali invece potrebbero arrivare 3 o 4 giocatori: nel primo caso si giocherebbe una sola partita, nel secondo caso due. Così ai quarti di finale si giocano 3 o 4 partite a seconda che vi arrivino 7 o 8 giocatori: in generale ai 2^n-mi di finale si giocano $2^n - 1$ partite o 2^n partite a seconda che vi arrivino $2^{n+1} - 1$ o 2^{n+1} giocatori. Procedendo a ritroso si trova che l'unica sequenza di numeri di partite giocate che porti ad un totale di 100 partite corrisponde alla presenza di 101 giocatori.

5. Niente numeri consecutivi

Sia A l'insieme formato dai primi 11 numeri interi positivi, cioè $A = \{1, 2, 3,\dots, 10, 11\}$. Quanti sono i sottoinsiemi di A, formati da almeno due elementi, che non contengono due numeri consecutivi?

[0221] Trascuriamo per ora la clausola che i sottoinsiemi che vogliamo contare debbano contenere almeno due elementi. Il numero 6 gioca da "centro di simmetria" di A.
Contiamo i sottoinsiemi ammissibili che non contengono 6: includendo il vuoto, a sinistra di 6 ve ne sono 13 e altrettanti a destra, per un totale di $13^2 = 169$.
Contiamo ora i sottoinsiemi ammissibili che contengono 6: con solo elementi che non superano 6 ve ne sono 8 e altrettanti ve ne sono con solo elementi non inferiori a 6, per un totale di $8^2 = 64$.
Dalla somma 169 + 64 dobbiamo ora escludere l'insieme vuoto e i 10 insiemi costituiti da un solo elemento diverso da 6 (contati ciascuno una sola volta fra i 169) e l'insieme costituito dal solo elemento 6 (contato una sola volta fra i 64).

6. Il quadrato perfetto

Un numero intero di 6 cifre è un quadrato perfetto, è un multiplo di 27, la sua cifra delle unità è 0 e quella delle centinaia è 5. Quanto vale la sua radice quadrata?

[0450] Essendo un quadrato perfetto multiplo di 10, deve essere multiplo di 100, dunque nel nostro caso di 500 (la cifra delle centinaia è 5). Sempre dalle ipotesi segue allora che deve contenere il fattore 5, il fattore 3 e il fattore 2 ciascuno elevato a potenza pari (non minore di 4 per il fattore 5 e il fattore 3): deve dunque essere multiplo di 5^4, di 3^4 e di 2^2. Gli unici numeri di 6 cifre soddisfacenti questi requisiti sono $5^4 \times 3^4 \times 2^2$ e $5^4 \times 3^4 \times 2^4$: di questi, solo il primo ha la cifra delle centinaia uguale a 5. La sua radice quadrata è $25 \times 9 \times 2$.

7. L'auto di Marco

Il contachilometri dell'auto di Marco ha 6 cifre. Marco sta guidando e nota che in questo momento sul suo contachilometri appare un numero formato solo dalle cifre 1 e 2 e che il numero che apparirà fra 9 chilometri sarà ancora formato solo dalle cifre 1 e 2. Quanti sono i numeri che potrebbero apparire fra 9 chilometri?

[0016] L'unica possibilità è che il numero attuale termini con 12. Dopo 9 chilometri, il numero che apparirà terminerà con 21, indipendentemente dalle rimanenti prime 4 cifre del numero attuale. Queste potranno essere scelte fra tutti i 2^4 allineamenti di 4 cifre ottenibili utilizzando solo le cifre 1 e 2.

8. Numeri di 7 cifre

Quanti numeri interi positivi di 7 cifre significative (cioè la cui prima cifra non sia 0) contengono il blocco di cifre 2011 come parte della loro rappresentazione decimale (si intende che le cifre del blocco devono apparire consecutivamente)?

[3700] Il blocco 2011 può
a) non essere preceduto da alcuna cifra: ciò accade per 10^3 numeri a due a due diversi fra loro;
b) essere preceduto da una, due o tre cifre: ciascuna di queste tre situazioni è verificata da 9×10^2 numeri a due a due diversi fra loro.

9. I due corridori

Due corridori, Marco e Felice, devono effettuare un percorso comune: Marco dal punto A al punto B, Felice dal punto B al punto A. Essi partono nello stesso istante e ognuno tiene costante la propria velocità. Quando Marco è a metà strada, a Felice manca un'ora e mezza per arrivare; quando Felice è a metà strada, a Marco mancano tre quarti d'ora per arrivare. Quanti minuti impiega Felice in più di Marco per completare il percorso?

[0030] Siano F e M rispettivamente i tempi, in minuti, impiegati da Felice e Marco per completare il percorso. Da $F = 90 + M/2$ e $M = 45 + F/2$, sottraendo membro a membro si ottiene
$3(F - M) / 2 = 45$.

10. Uno strano ascensore

In un albergo di 20 piani i primi dieci sono dipinti di verde, quelli dall'undicesimo al ventesimo sono dipinti di rosso. L'albergo non ha scale e per cambiare piano si può usare solo uno strano ascensore che si comporta nel modo seguente. Chi entra nell'ascensore in un piano verde è sicuro di essere portato al piano che desidera. Chi entra nell'ascensore in un piano rosso è portato in un piano dello stesso colore di quello che ha selezionato, ma non necessariamente nel piano selezionato; in ogni caso, l'ascensore cambia piano. Da qualunque piano venga chiamato, l'ascensore vi arriva appena libero. Una cameriera deve visitare tutti i piani, partendo dal primo e ritornandovi. Se l'ascensore si comporta nel modo a lei più sfavorevole, qual è il minimo numero di viaggi che le consente di raggiungere lo scopo?

[0029] Nell'ottica di minimizzare i viaggi, la prima volta che la cameriera mette piede in un piano rosso le conviene selezionare subito un altro piano rosso: poiché l'ascensore deve cambiare piano, con un solo viaggio sarà sicura di visitare un piano rosso non ancora visitato. A questo punto, per essere certa a priori di visitare tutti i rimanenti 8 piani rossi, deve necessariamente mettere in preventivo di passare per un piano verde da cui ripartire per il piano rosso voluto, spendendo dunque due viaggi. Allora dal primo piano, che è verde, le converrà puntare ad esempio all'11-mo: da qui selezionare il 12-mo e poi un piano verde qualunque dopo ogni rosso per completare i piani rossi. Nella peggiore delle ipotesi sarà sempre rimandata al primo piano e non potrà utilizzare questo viaggio per visitare un nuovo piano verde, ma dopo al più 16 + 2 viaggi avrà visitato tutti i piani rossi. Ora con al più 1 + 9 + 1 viaggi potrà ritornare ad una piano verde, visitare tutti i piani verdi e ritornare al primo piano.

11. Il numero più piccolo

Qual è il più piccolo numero intero maggiore di 1 che non può essere scritto nella forma
$a \times b + c$ dove a, b e c sono cifre tutte diverse fra loro?

[0070] Ogni numero positivo di una sola cifra ammette la scrittura da evitare (ad esempio $7 = 0 \times 6 + 7$, e per gli altri si procede in modo analogo). Aiutandosi ad esempio con la tavola pitagorica per procedere da 11 in poi, si arriva facilmente a 69. 70 invece non può essere ottenuto che nei due modi $8 \times 8 + 6$ e $9 \times 7 + 7$, entrambi da evitare.

12. Nonno Angelo

Nonno Angelo, che non è ancora centenario, oggi dice: “La mia età (espressa da un numero intero di anni) fra un anno sarà un multiplo di 2, fra due anni un multiplo di 3, fra tre anni un multiplo di 4, fra quattro anni un multiplo di 5”. Quanti anni ha oggi nonno Angelo?

[0061] Il numero cercato deve essere dispari e, sommandovi 4, si deve ottenere un multiplo di 5: deve dunque avere 1 come cifra delle unità. Che sia 1 non è possibile. Tra i numeri 11, 21, 31, . . ., 91, solo 61 soddisfa le rimanenti condizioni.

13. Una potenza di due

Sapete che $2^n = 134.217.728$. Quanto vale n ?

[0027] Facilmente si calcola ad esempio $2^{10} = 1.024$. Dividendo 134.217.728 per 1.024 si ottiene 131.072; dividendo ancora per 1.024 si ottiene $128 = 2^7$.

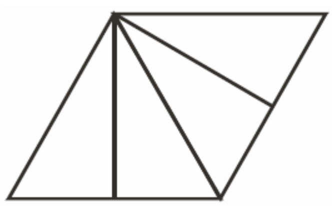
14. I comple-giorni

Scegliendo tre persone diverse a caso, qual è la probabilità che almeno due di esse siano nate nello stesso giorno della settimana (non importa quale)? Il risultato è un numero compreso fra 0 e 1: scrivete, nell’ordine, solo le sue prime quattro cifre decimali (cioè le prime quattro a destra della virgola).

[3877] Sia p la probabilità che le tre persone siano nate in tre giorni diversi della settimana: stiamo cercando $1 - p$. Supponiamo di incontrare le tre persone in successione: la seconda sarà nata in un giorno diverso dalla prima con probabilità 6/7, la terza sarà nata in un giorno diverso da ciascuno dei giorni delle prime due con probabilità 5/7. Si ha dunque $p = 30/49$ e $1 - p = 19/49 =$ 0,3877…. .

15. Gli angoli del rombo

In figura vedete un rombo formato accostando quattro triangoli rettangoli fra loro congruenti. Quanti gradi misura ciascuno degli angoli acuti del rombo?



[0060] Chiramente in ogni triangolo rettangolo un cateto è lungo quanto metà dell’ipotenusa: allora l’unione di due triangoli rettangoli che hanno l’altro cateto in comune è un triangolo equilatero. L'angolo acuto del rombo coincide con un angolo di un triangolo equilatero.