

Kangourou Italia
Gara del 22 marzo 2011
Categoria Student
Per studenti di quarta o quinta
della secondaria di secondo grado



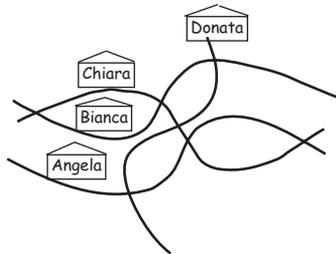
I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. In un teatro vi sono 100 spettatori: 50 di essi sono italiani, 60 sono maschi, 90 sono vegetariani. Di quanti spettatori presenti in quel teatro si può essere certi che siano allo stesso tempo italiani, maschi e vegetariani?
 A) 0 B) 1 C) 10 D) 40 E) 50

2. Supponiamo di scrivere in ordine decrescente tutti i numeri interi positivi di 4 cifre significative la somma delle cui cifre è 4. Che posizione occupa in questa lista il numero 2011?
 A) La sesta B) La settima C) L'ottava
 D) La nona E) La decima

3. Se $2^X = 15$ e $15^Y = 32$, xy è uguale a
 A) 5 B) $\log_2 15 + \log_{15} 32$ C) $\log_2 47$ D) 7 E) $\sqrt{47}$

4. Durante un viaggio in auto su una strada accidentata, Michela ha tracciato lo schizzo che vedi in figura: esso indica le case delle sue quattro amiche, le vie in cui abitano e gli incroci fra queste vie. Nella realtà però via Freccia, via Righello e via Chiodo sono tutte vie rettilinee. La quarta via è via Curva. Quale delle quattro amiche abita in via Curva?



A) Angela B) Bianca C) Chiara D) Donata
 E) Non si può dedurre dallo schizzo a disposizione

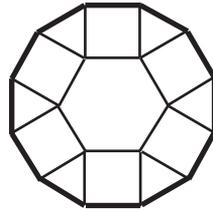
5. Tre piloti, Michael, Fernando e Sebastian, prendono parte ad una gara di Formula 1. Appena partiti è in testa Michael, Fernando è secondo e Sebastian terzo. Durante la gara Michael e Fernando si scambiano di posizione 9 volte, Fernando e Sebastian 10 volte e Michael e Sebastian 11 volte. In che ordine finiscono la gara?

A) Michael, Fernando, Sebastian B) Fernando, Sebastian, Michael
 C) Sebastian, Michael, Fernando D) Sebastian, Fernando, Michael
 E) Fernando, Michael, Sebastian

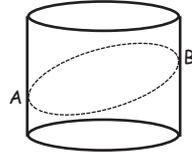


6. La regione in figura è scomponibile, come indicato, in un esagono regolare di lato 1, sei triangoli e sei quadrati. Quanto misura il suo perimetro?

- A) $6(1 + \sqrt{2})$ B) $6(1 + \sqrt{3}/2)$
 C) $6 + 3\sqrt{2}$ D) 9
 E) 12



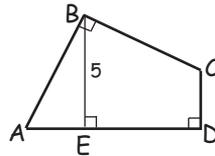
7. Un foglio di carta rettangolare è avvolto intorno ad un cilindro in modo da coprirlo senza sovrapporsi a se stesso; se il cilindro viene tagliato con un piano passante per i punti A e B in figura, e la parte inferiore del foglio viene poi stesa su un piano, quale delle figure seguenti può esserne l'immagine?



- A) B) C) D) E)

8. Qual è l'area del quadrilatero ABCD in figura, se AB è lungo quanto BC, BE è lungo 5 e gli angoli ABC, ADC e BED sono retti?

- A) 20 B) 22,5 C) 25
 D) 27,5 E) 30



9. Andrea ha scritto su una lavagna tutti i numeri dispari da 1 a 2011 e poi Roberto ha cancellato tutti e soli i multipli di 3. Quanti numeri sono rimasti scritti sulla lavagna?

- A) 335 B) 336 C) 671 D) 1005 E) 1006

10. Un rettangolo è sezionato in 3 rettangoli, dei quali uno ha i lati di lunghezza 7 e 11 e un altro ha i lati di lunghezza 4 e 8. Il terzo rettangolo ha, tra quelli ammissibili, l'area massima: quali sono le misure dei suoi lati?

- A) 1 e 11 B) 3 e 4 C) 3 e 8 D) 7 e 8 E) 8 e 11

I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. Per decidere chi si tufferà per primo in un lago gelato, Massimo ed Ugo vogliono lanciare dei dadi e basarsi sul risultato dei lanci secondo la seguente regola: se non escono 6 si tufferà Massimo, se c'è un solo 6 si tufferà Ugo mentre se escono più 6 rinunceranno entrambi a fare il bagno. Quanti dadi devono lanciare se vogliono che il rischio di tuffarsi per primo sia equamente ripartito tra loro due?

- A) 3 B) 5 C) 6 D) 9
 E) Non è possibile che il rischio sia lo stesso



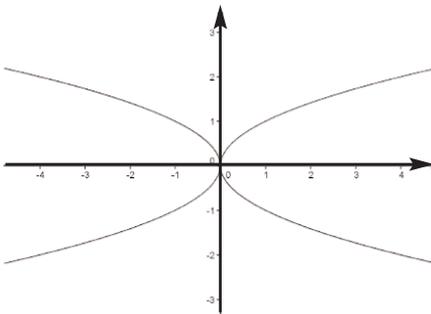
12. Andrea e Bruno rispondono la verità a chi chiede quanti membri ha il loro Club degli Scacchi. Andrea dice "Tutti i membri del Club, eccetto 5, sono maschi". Bruno dice: "In ogni gruppo di 6 membri del Club ci sono almeno 4 femmine". Quanti sono i membri del Club?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 12 E) 18

13. 48 ragazzi partecipano ad una gita sciistica. Alcuni di essi sono insieme a fratelli (o sorelle); precisamente 6 partecipano con esattamente 1 fratello, 9 con esattamente 2 e 4 con esattamente 3 fratelli. Tutti gli altri non hanno fratelli (o sorelle) che partecipano alla gita. Quante famiglie hanno figli che prendono parte alla gita?

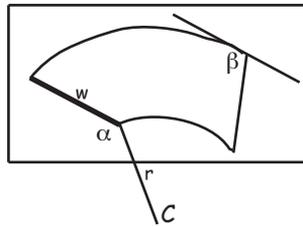
- A) 19 B) 25 C) 31 D) 36 E) 48

14. Quante delle seguenti funzioni $y = x^2$; $y = -x^2$; $y = \sqrt{x}$; $y = -\sqrt{x}$; $y = \sqrt{-x}$; $y = -\sqrt{-x}$; $y = \sqrt{|x|}$; $y = -\sqrt{|x|}$ hanno il grafico incluso nella figura?



- A) 0 B) 2
C) 4 D) 6
E) 8

15. Il tergicristallo posteriore di un'auto è costruito in modo che la spazzola tergovetro w e il braccio di collegamento r abbiano uguale lunghezza e siano collegati rigidamente formando un angolo che misura α radianti. Il tergicristallo ruota sull'estremo C del braccio e pulisce la superficie come illustrato in figura. Quanto misura in radianti l'angolo β formato dal margine destro della superficie pulita e dalla tangente al suo lato curvo superiore nel punto di contatto fra il lato curvo e il margine destro?

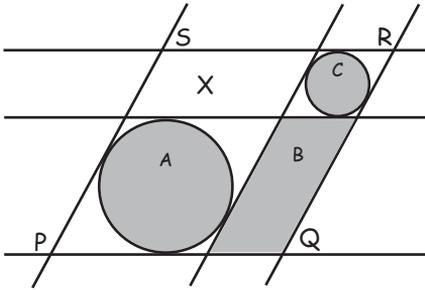


- A) $\frac{3\pi - \alpha}{2}$ B) $\pi - \frac{\alpha}{2}$ C) $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ D) $\frac{\pi}{2} + \alpha$ E) $\pi + \frac{\alpha}{2}$

Student

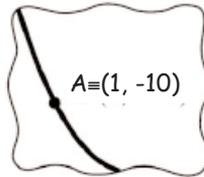


16. In figura ci sono 3 rette orizzontali e 3 rette inclinate tra loro parallele; entrambi i cerchi sono tangenti a 4 delle rette. A, B e C sono le aree delle figure ombreggiate, come indicato, e D è l'area del parallelogramma PQRS. Per calcolare l'area del parallelogramma indicato con X, qual è il minimo numero di aree che è sufficiente conoscere tra A, B, C e D?



- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4
E) Non basta conoscere A, B, C e D

17. Nel piano con l'abituale sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy , è stato segnato sulla parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ il punto $A=(1, -10)$; gli assi e gran parte del grafico della parabola sono poi stati cancellati, ed è rimasto ciò che si vede in figura. Quale delle affermazioni seguenti può essere falsa?



- A) $a > 0$ B) $b < 0$ C) $a+b+c < 0$ D) $b^2 > 4ac$ E) $c < 0$

Student

18. Nell'espressione $\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot O \cdot U \cdot R \cdot O \cdot U}{G \cdot I \cdot O \cdot C \cdot O}$ ogni lettera rappresenta una cifra diversa da zero; lettere uguali rappresentano cifre uguali e lettere diverse rappresentano cifre diverse. Qual è il più piccolo valore intero che questa espressione può assumere? ("·" indica il prodotto.)

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 7

19. Su ogni pallina contenuta in un'urna della lotteria è scritto un intero positivo. Su esattamente 30 palline c'è un numero divisibile per 6, su esattamente 20 un numero divisibile per 7 e su esattamente 10 un numero divisibile per 42. Quante palline devono essere presenti, come minimo, nell'urna?

- A) 30 B) 40 C) 53 D) 54 E) 60

20. Nella griglia 3×3 in figura sono visibili 4 numeri. Nicola ha inserito un numero intero positivo in ogni cella che appare libera in modo che la somma dei numeri presenti in ogni sotto-griglia 2×2 valga 10 (le sotto-griglie possono essere realizzate solo troncando righe e colonne consecutive). Quanto può valere la somma dei numeri inseriti da Nicola?

	2	
1		3
	4	

- A) 9 B) 10 C) 12 D) 13
E) Nessuno dei valori precedenti



I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

21. Qual è la somma di tutti gli interi positivi n minori di 100 tali che $n^2 - 81$ sia un multiplo di 100? (0 va considerato fra i multipli di 100)

- A) 200 B) 100 C) 90 D) 81 E) 50

22. Consideriamo le due progressioni aritmetiche 5, 20, 35, ... e 35, 61, 87, Quante diverse progressioni aritmetiche di interi positivi le contengono entrambe?

- A) 0 B) 3 C) 5 D) 26 E) Infinite

23. La successione di funzioni numeriche $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... soddisfa le seguenti due condizioni:

$$(1) f_1(x) = x$$

$$(2) f_{n+1}(x) = (1 - f_n(x))^{-1} \text{ per ogni intero positivo } n.$$

Qual è il valore di $f_{2011}(2011)$?

- A) 2011 B) $-\frac{1}{2010}$ C) $\frac{2010}{2011}$ D) 1 E) -2011

24. In una scatola sono state inserite alcune palline rosse e alcune palline verdi. Se estraiamo a caso 2 palline dalla scatola, la probabilità che esse siano dello stesso colore è $1/2$. Quale dei seguenti può essere il numero complessivo delle palline inserite nella scatola?

- A) 81 B) 101 C) 1000 D) 2011 E) 10001

25. Nel prezzo del biglietto di una compagnia aerea è compreso il trasporto del bagaglio fino a un certo limite di peso, mentre viene chiesto un pagamento supplementare per ogni chilo o frazione di chilo di bagaglio eccedente il limite. Il signor Viaggio e la moglie avevano, in due, 60 kg di bagaglio ed hanno pagato 3 euro mentre il signor Girovago, per un bagaglio dello stesso peso, ha pagato 10,50 euro. Qual è, in chili, il massimo peso del bagaglio che ogni passeggero può trasportare senza sovrapprezzo?

- A) 10 B) 18 C) 20 D) 25 E) 39

Student



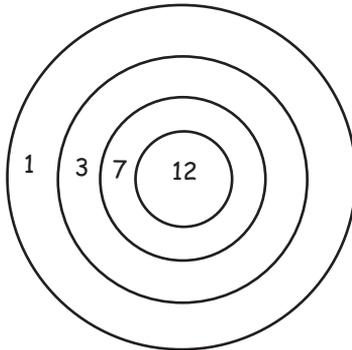
26. I lati AB, BC, CD, DE, EF, FA di un esagono sono tutti tangenti a uno stesso cerchio. Le lunghezze dei lati AB, BC, CD, DE ed EF sono rispettivamente 4, 5, 6, 7 e 8. Qual è la lunghezza del lato FA ?

A) 9 B) 8 C) 7 D) 6

E) Le informazioni non sono sufficienti per rispondere

27. Robin Hood ha tirato 3 frecce su un bersaglio e naturalmente lo ha sempre centrato, guadagnando ogni volta dei punti secondo lo schema illustrato in figura. Quanti sono i diversi punteggi complessivi che può avere realizzato?

A) 13 B) 17 C) 19
D) 20 E) 21



28. I numeri interi positivi a, b e c sono tali che $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. Qual è il minimo numero possibile di divisori del numero $a \cdot b \cdot c$, contando anche 1 e $a \cdot b \cdot c$ stesso?

A) 30 B) 49 C) 60 D) 77 E) 1596

Student

29. In ogni cella di una griglia 4×5 è stato inserito un intero positivo. I numeri inseriti sono a due a due diversi fra loro. Ogni coppia di numeri adiacenti (cioè in celle che abbiano un lato comune) ha un divisore comune maggiore di 1. Detto n il più grande dei numeri inseriti, qual è il minimo valore ammissibile per n ?

A) 21 B) 24 C) 26 D) 27 E) 40

30. Un cubo $3 \times 3 \times 3$ è ottenuto accostando 27 cubetti identici tra loro. Consideriamo un piano perpendicolare ad una delle diagonali del cubo e che passa per il centro del cubo. Quanti dei cubetti sono intersecati dal piano?

A) 17 B) 18 C) 19 D) 20 E) 21



2011

Categoria Student

1. Risposta **A)** La somma delle cardinalità dei tre insiemi formati rispettivamente dagli spettatori non italiani, dalle spettatrici femmine e dai non vegetariani è 100, quindi i tre insiemi possono essere disgiunti.
2. Risposta **D)** Scriviamo, in ordine decrescente e fino a 2011, la lista dei numeri che soddisfano la proprietà richiesta: 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020, 2011.
3. Risposta **A)** $32 = 15^y = (2^x)^y = 2^{xy}$ quindi $xy = 5$.
4. Risposta **C)** La via dove abita Chiara interseca due volte due delle altre strade: poiché almeno una di queste è una retta, non può esserlo la via di Chiara.
5. Risposta **B)** Alla fine della gara Fernando e Sebastian, che si sono scambiati posizione un numero pari di volte, sono nello stesso ordine in cui sono partiti, mentre si è invertito l'ordine, dato che si sono scambiati un numero dispari di volte, tra Michael e Fernando e tra Michael e Sebastian. L'ordine sarà quindi Fernando, Sebastian, Michael.
6. Risposta **E)** Ogni angolo esterno di un esagono regolare misura 240° , quindi i triangoli in figura sono equilateri, e il perimetro richiesto misura 12.
7. Risposta **C)** La curva che delimita la sezione tagliata non deve presentare angoli, nemmeno quando il foglio viene richiuso sul cilindro: l'unica possibilità è C.
8. Risposta **C)** Poiché $\overline{AB} = \overline{BC}$ e $\widehat{BAE} = \widehat{EBC}$, il quadrilatero è equivalente ad un quadrato di lato 5.
9. Risposta **C)** I multipli di 3 minori di 2011 sono 670, di cui 335 dispari. I numeri scritti da Andrea sono 1006, quindi ne restano 671.
10. Risposta **D)** Per ottenere un terzo rettangolo (e quindi un rettangolo totale) di area massima, poiché il lato di lunghezza minima (4) e quello di lunghezza massima (11), appartengono a rettangoli diversi, occorre e basta costruire il rettangolo in modo che quei due lati siano sovrapposti. Il rettangolo da aggiungere avrà allora lati 7 e 8.
11. Risposta **B)** Detto k il numero dei lanci, su 6^k casi possibili (equiprobabili), dovrà tuffarsi Massimo nei 5^k casi in cui non esce neanche un 6, Ugo nei $k \cdot 5^{k-1}$ casi in cui esce un unico 6; si ha $5^k = k \cdot 5^{k-1}$ se e solo se $k = 5$.
12. Risposta **B)** Dalle affermazioni si deduce che il Club ha 5 femmine ed al più 2 maschi; poiché Andrea e Bruno appartengono al Club, i maschi sono esattamente 2.

13. Risposta **D)** 19 partecipanti hanno fratelli ed precisamente sono divisi in 3 coppie, 3 terne ed una quaterna di fratelli, mentre gli altri 29 non hanno fratelli, per un totale di 36 famiglie.
14. Risposta **D)** Tutte tranne $y = \pm x^2$.
15. Risposta **B)** Il lato curvo superiore della superficie pulita sta su una circonferenza centrata in C; la sua tangente è quindi ortogonale al segmento congiungente C e il vertice di β . Tale segmento è poi la base del triangolo isoscele che ha per lati w ed r quando il tergicristallo arriva al margine destro e quindi forma un angolo di $\frac{\pi - \alpha}{2}$ con tale margine della superficie: di conseguenza $\beta = \pi - \frac{\alpha}{2}$.
16. Risposta **A)** X ha la stessa area di B, infatti possono essere visti come parallelogrammi che hanno per base uno dei lati del rombo circoscritto al cerchio di area A e per altezza relativa a tale base il diametro del cerchio di area C.
17. Risposta **E)** La parabola in figura ha concavità verso l'alto, vertice di ascissa positiva e ordinata negativa, e quindi 2 intersezioni con l'asse x, e $y(1) = a + b + c < 0$, quindi le affermazioni A), B), D) e C) sono certamente vere mentre non si sa nulla sul parametro C.
18. Risposta **B)** Dopo aver semplificato la G e le due O, per ottenere il valore minimo possibile della frazione poniamo $I \cdot C = 9 \cdot 8$, $U = 1$ e $K \cdot A \cdot N \cdot R = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6$, scartando 5 per poter ottenere un quoziente intero.
19. Risposta **B)** Ci sono almeno 20 palline con un numero divisibile per 6 ma non per 42, 10 con un numero divisibile per 7 ma non per 42 e 10 con un numero divisibile per 42; in totale 40.
20. Risposta **E)** Detti a, b, c, d i numeri inseriti negli angoli ed e il numero inserito al centro, deve essere $e < 3$ e $a + b + c + d + 4e = 40 - 10$; quindi $a + b + c + d + e$ che è uguale a $30 - 3e$ deve essere un multiplo di 3 maggiore strettamente di 21.
21. Risposta **A)** Affinché $n^2 - 81$ sia un multiplo di 100 occorre e basta che sia divisibile sia per 4 che per 25. Osserviamo che n deve essere dispari e inoltre che $n - 9$ e $n + 9$ non possono essere entrambi divisibili per 5, perché lo sarebbe 18 che è la loro somma, quindi sono entrambi pari e uno dei due è divisibile per 25; le possibilità sono allora che $n - 9$ sia 0 o 50 oppure che $n + 9$ sia 50 o 100, da cui $n = 9, 59, 41, 91$. La somma dei valori ammissibili è 200.
22. Risposta **C)** Poiché le due progressioni hanno ragioni prime tra loro, solo una successione di interi consecutivi potrà contenerle entrambe; visto che 5 è il

minimo dei numeri contenuti, vanno bene le (diverse) successioni che hanno come primo elemento 1, 2, 3, 4 o 5.

23. Risposta **A)** La successione di funzioni è periodica di periodo 3. Poiché $2011 \approx 1 \pmod{3}$, $f_{2011}(2011) = 2011$.

24. Risposta **A)** Sia n il numero delle palline ed r il numero delle palline rosse: la probabilità di estrarre due palline dello stesso colore è $\frac{r}{n} \cdot \frac{r-1}{n-1} + \frac{n-r}{n} \cdot \frac{n-r-1}{n-1} = \frac{1}{2}$ da cui si ottiene $n = (n-2r)^2$, quindi n deve essere un quadrato perfetto.

25. Risposta **D)** Detto n il massimo peso di bagaglio ammesso, si ha $(60-2n) \div 3 = (60-n) \div 10,5$, da cui $n = 25$.

26. Risposta **D)** Poiché i due segmenti di tangente condotti da un punto esterno ad una circonferenza hanno uguale lunghezza, si ha $\overline{AB} + \overline{CD} + \overline{EF} = \overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FA}$ cioè $18 = 12 + \overline{FA}$.

27. Risposta **C)** Può fare tutte e tre le volte gli stessi punti, ottenendo 4 punteggi totali diversi tra loro, fare due volte gli stessi punti e una punti diversi ottenendo 12 punteggi diversi tra loro oppure fare punti diversi nei tre tiri ottenendo 4 punteggi diversi tra loro; confrontando i punteggi ottenibili si vede che solo 9 può essere ottenuto due volte ($9 = 3 \times 3 = 2 \times 1 + 7$), quindi i punteggi distinti sono 19.

28. Risposta **D)** a e c devono essere pari e guardando le potenze di 2 si vede che $c = 2^2 c_1$ e quindi $a = 2^5 a_1$ e $b = 2^3 b_1$. a e b devono contenere il fattore 3, che quindi deve comparire nelle uguaglianze con un esponente multiplo di 2 e di 3; l'esponente 6 va bene perché è compatibile con un fattore 3 in c . La miglior scelta per i tre numeri è $a = 2^5 \cdot 3^3$; $b = 2^3 \cdot 3^2$; $c = 2^2 \cdot 3$ da cui $abc = 2^{10} \cdot 3^6$ con 77 divisori distinti.

29. Risposta **C)** Occorrono 20 numeri, tutti maggiori di 1; tra i numeri minori di 21 non possono soddisfare alla regola i numeri primi maggiori di 7 quindi scartiamo 11,13, 17 e 19 ed aggiungiamo al loro posto 22, 24, 25 e 26, scartando 23 perché primo. Ecco una griglia che soddisfa il criterio assegnato

costruita con i numeri così scelti:

	7	14	2	4	8
	21	12	16	22	26
	9	18	24	20	10
	3	6	15	25	5

30. Risposta **C)** Posizioniamo un sistema cartesiano ortogonale con l'origine in un vertice del cubo, i tre assi sovrapposti ai 3 spigoli uscenti dal vertice e unità di misura la lunghezza dello spigolo di un cubetto. Per ciascuno dei 27 cubetti, sia (a_1, a_2, a_3) il vertice più vicino all'origine e (b_1, b_2, b_3) quello più lontano, con $b_i = a_i + 1$, per $i = 1, 2, 3$. Il piano che interessa avrà equazione $x + y + z = \frac{9}{2}$, ed

interseca tutti i cubetti per cui $a_1 + a_2 + a_3 < \frac{9}{2}$ e $b_1 + b_2 + b_3 > \frac{9}{2}$. I cubetti che non soddisfano la prima disequazione sono quelli con vertice più vicino $(2,2,1)$, $(2,1,2)$, $(2,2,1)$ e $(2,2,2)$ e quelli che non soddisfano la seconda sono quelli con vertice più lontano $(1,1,1)$, $(2,1,1)$, $(1,2,1)$, $(2,1,1)$: in totale 8 cubetti.