

Kangourou Italia
Gara del 22 marzo 2011
Categoria Junior
Per studenti di seconda o terza della
secondaria di secondo grado



I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. Qual è il più piccolo numero di interi consecutivi la cui somma vale 201120112011?

- A) 2 B) 3 C) 4 D) 6
 E) È impossibile ottenere quel numero sommando interi consecutivi

2. In figura vedi un trapezio. A e B sono i punti medi dei lati obliqui e l'area del rettangolo ombreggiato vale 13 cm^2 . Quanti centimetri quadrati misura l'area del trapezio?



- A) 24 B) 25 C) 26 D) 27 E) 28

3. Se sommo le lunghezze di tre dei lati di un rettangolo assegnato, posso ottenere come risultato 20 o 22. Quanto vale il perimetro del rettangolo?

- A) 38 B) 28 C) 30 D) 48 E) 56

4. Poniamo $X = 122 \times 123 + 123 \times 124 + 124 \times 125$, $Y = 122^2 + 123^2 + 124^2$, $Z = 121 \times 122 + 122 \times 123 + 123 \times 124$. Quale delle seguenti relazioni è vera?

- A) $Y < X < Z$ B) $X < Y = Z$ C) $X < Y < Z$
 D) $Z < Y < X$ E) $X = Y < Z$

5. In un teatro vi sono 100 spettatori: 50 di essi sono italiani, 60 sono maschi, 90 sono vegetariani. Di quanti spettatori presenti in quel teatro si può essere certi che siano allo stesso tempo italiani, maschi e vegetariani?

- A) 0 B) 1 C) 10 D) 40 E) 50

6. Un mosaico rettangolare di area 360 cm^2 è ottenuto accostando piastrelle quadrate, tutte della stessa taglia. Un lato del mosaico misura 24 cm, l'altro misura 5 volte il lato delle piastrelle. Quanto vale, in centimetri quadrati, l'area di ogni piastrella?

- A) 1 B) 4 C) 9 D) 16 E) 25

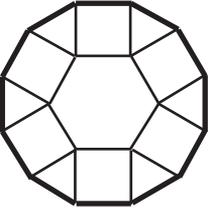
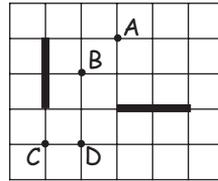
7. Supponiamo di scrivere in ordine decrescente tutti i numeri interi positivi di 4 cifre significative (cioè tali che la cifra delle migliaia non sia 0), la somma delle cui cifre è 4. Che posizione occupa in questa lista il numero 2011?

- A) La sesta B) La settima C) L'ottava D) La nona E) La decima



8. Osserva la figura: ognuno dei due segmenti evidenziati è ottenibile dall'altro per rotazione. Quali dei punti evidenziati sono centri di tali rotazioni?

- A) Solo A B) A e C C) A e D
 D) Solo D E) A, B, C e D

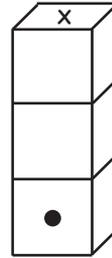


9. La regione in figura è scomponibile, come indicato, in un esagono regolare di lato 1, sei triangoli e sei quadrati. Quanto misura il suo perimetro?

- A) $6(1 + \sqrt{2})$ B) $6(1 + \sqrt{3}/2)$
 C) $6 + 3\sqrt{2}$ D) 9 E) 12

10. Tre dadi regolari (cioè tali che la somma dei punti su facce opposte sia sempre 7) sono impilati come indica la figura. Del dado più basso è indicata la faccia con 1 punto. Inoltre sai che, ogni volta che due facce di dadi diversi combaciano, la somma dei punti sulle due facce è 5. Quanti punti ci sono sulla faccia contrassegnata con X?

- A) 2 B) 3 C) 4
 D) 5 E) 6



Junior

I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. In un certo mese di un certo anno ci sono 5 lunedì, 5 martedì e 5 mercoledì. Nel mese precedente ci sono solo 4 domeniche. Allora

- A) nel mese successivo ci sono esattamente 4 venerdì.
 B) nel mese successivo ci sono esattamente 4 sabati.
 C) nel mese successivo ci sono 5 domeniche.
 D) nel mese successivo ci sono 5 sabati.
 E) la situazione descritta non può presentarsi.

12. Tre piloti, Michael, Fernando e Sebastian, prendono parte ad una gara di Formula 1. Appena partiti è in testa Michael, Fernando è secondo e Sebastian terzo. Durante la gara Michael e Fernando si scambiano di posizione 9 volte, Fernando e Sebastian 10 volte e Michael e Sebastian 11 volte. In che ordine finiscono la gara?

- A) Michael, Fernando, Sebastian B) Fernando, Sebastian, Michael
 C) Sebastian, Michael, Fernando D) Sebastian, Fernando, Michael
 E) Fernando, Michael, Sebastian

13. Se $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$, quanto vale n ?

- A) 1005 B) 1006 C) 2010 D) 2011
 E) Nessuno dei numeri precedenti



14. Nella griglia 3x3 in figura sono visibili 5 numeri. Nicola ne ha inserito uno in ogni cella che appare libera in modo che la somma dei numeri presenti in ogni sotto-griglia 2x2 valga 10 (le sotto-griglie possono essere realizzate solo troncando righe e colonne consecutive). Quanto vale la somma dei numeri inseriti da Nicola?

1		0
	2	
4		3

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

15. Ada afferma che Bice sta mentendo. Bice afferma che Carla sta mentendo. Carla afferma che Bice sta mentendo. Daniela afferma che Ada sta mentendo. Quante fra queste quattro ragazze stanno mentendo?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

16. In figura vedi una griglia 4x4. Devi annerire alcune celle della griglia in modo che, per ogni riga, il numero di celle della riga annerite coincida con il numero indicato a destra della riga stessa e, per ogni colonna, il numero di celle della colonna annerite coincida con il numero indicato ai piedi della colonna stessa. In quanti diversi modi puoi farlo?

				2
				0
				1
				1
2	0	1	1	

- A) 0 (è impossibile) B) 1 C) 3 D) 5 E) 9

Junior

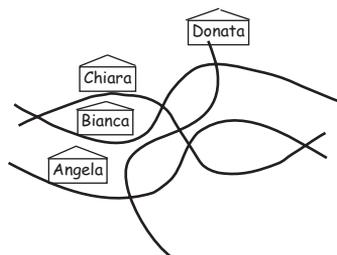
17. Qual è il maggior numero di numeri interi consecutivi di tre cifre che hanno almeno una cifra dispari?

- A) 121 B) 111 C) 110 D) 100 E) 99

18. Ho due recipienti a forma di cubo; il lato del più grande è lungo un decimetro in più del lato dell'altro. Il più grande è pieno d'acqua, l'altro è vuoto. Se io travaso l'acqua dal recipiente grande al piccolo fino a riempirlo, nel recipiente grande rimangono 217 litri d'acqua. Quale è, in litri, la capacità del recipiente piccolo?

- A) 343 B) 125 C) 1331 D) 729
E) Un valore diverso dai precedenti

19. Durante un viaggio in auto su una strada accidentata, Michela ha tracciato lo schizzo che vedi in figura: esso indica le case delle sue quattro amiche, le vie in cui abitano e gli incroci fra queste vie. Nella realtà però via Freccia, via Righello e via Chiodo sono tutte vie rettilinee. La quarta via è via Curva. Quale delle quattro amiche abita in via Curva?



- A) Angela B) Bianca C) Chiara D) Donata
E) Non si può dedurre dallo schizzo a disposizione

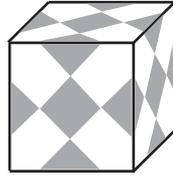


20. I numeri x e y sono entrambi maggiori di 1. Tra le seguenti frazioni, quale ha il valore più alto?

- A) $\frac{x}{y+1}$ B) $\frac{x}{y-1}$ C) $\frac{2x}{2y+1}$ D) $\frac{2x}{2y-1}$ E) $\frac{3x}{3y+1}$

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

21. Simone ha un cubo di vetro di un decimetro di lato. Usando degli adesivi dorati a forma di quadrato, tutti uguali fra loro, ha decorato la superficie del cubo come indicato dalla figura, in modo che le facce del cubo presentino tutte la stessa decorazione. Qual è, in centimetri quadrati, l'area della porzione della superficie del cubo che appare dorata?

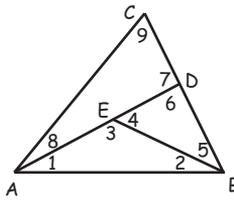


- A) 37,5 B) 150 C) 375 D) 300
E) 225

22. Diciamo che un numero intero positivo di 5 cifre significative tutte diverse fra loro è "interessante" se la sua prima cifra è la somma delle rimanenti quattro. Quanti numeri interessanti esistono?

- A) 72 B) 144 C) 168 D) 216 E) 288

23. In un triangolo ABC , sul lato BC viene scelto un punto D e sul segmento AD viene scelto un punto E . Si vengono così a determinare 9 angoli denotati con le cifre da 1 a 9, come indicato nella figura. Qualunque sia il triangolo ABC , alcuni di questi angoli risultano necessariamente a due a due diversi fra loro. Nelle configurazioni in cui ve ne sono il meno possibile, quanti sono?



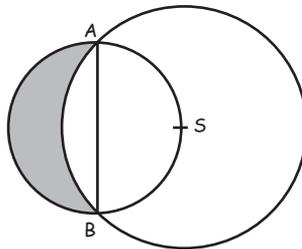
- A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

24. Marco scrive gli interi da 1 a 9 in un ordine casuale. Per ogni coppia di interi che, in quell'ordine, risultano adiacenti, Marco calcola quindi la media aritmetica dei due interi. Infine, somma tutte le medie aritmetiche calcolate. Qual è il più grande valore che può ottenere?

- A) 40 B) 43 C) 42,5 D) 43,5 E) 44

25. La figura mostra due circonferenze di raggi diversi. I punti A e B stanno su entrambe. Il segmento AB è un diametro di quella di raggio minore, la quale passa per il centro S di quella di raggio maggiore. Quest'ultima ha raggio 1. Quanto vale l'area della regione ombreggiata?

- A) $\pi / 6$ B) $\pi \sqrt{3} / 12$ C) $1/2$ D) $\sqrt{3} / 4$
E) Un numero diverso dai precedenti



Junior



26. Quante quaterne di spigoli di un cubo sono tali che, comunque si scelgano due spigoli nella quaterna, questi non abbiano vertici in comune? (Se due quaterne non coincidono, ma sono ottenibili l'una dall'altra per rotazione del cubo, vanno considerate diverse.)

- A) 9 B) 7 C) 6 D) 12 E) 8

27. Per ogni intero $n \geq 2$, denotiamo con « n » il più grande numero primo che non supera n . Da quanti interi positivi k è soddisfatta l'equazione

$$\llbracket k + 1 \rrbracket + \llbracket k + 2 \rrbracket = \llbracket 2k + 3 \rrbracket ?$$

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) Più di 3.

28. Hai una griglia 5×5 e vuoi annerirne alcune celle in modo che in ogni sotto-griglia 3×3 vi siano esattamente n celle annerite. Per quali interi n , da 1 a 8 inclusi, puoi raggiungere lo scopo? (Le sotto-griglie possono essere realizzate troncando solo righe e colonne consecutive.)

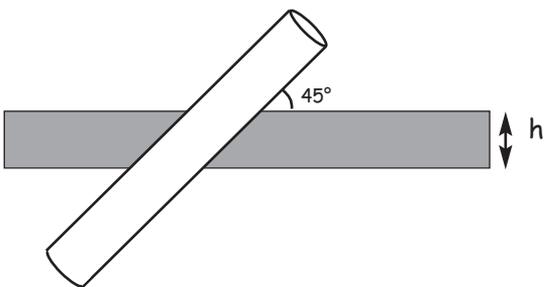
- A) Solo 1 B) Solo 1 e 2 C) Solo 1, 2 e 3
D) Solo 1, 2, 7 e 8 E) Per ogni valore di n (fra 1 e 8 inclusi)

Junior

29. Assegnato un tetraedro regolare $ABCD$, sia Σ il piano contenente la faccia ABC e s la retta in Σ contenente lo spigolo BC . Sia quindi $BCDE$ il tetraedro regolare che ha in comune con $ABCD$ solo la faccia BCD . Dove la retta passante per D e E interseca il piano Σ ?

- A) In un punto del triangolo ABC
B) Nel semipiano di Σ determinato da s contenente A , ma al di fuori del triangolo ABC
C) Nel semipiano di Σ determinato da s non contenente A
D) In nessun punto: la retta è parallela al piano Σ
E) La risposta dipende dalla lunghezza dello spigolo del tetraedro

30. Un cilindro circolare retto con la base di raggio 2, verniciato di bianco, viene posto su una striscia rettangolare di stoffa rossa di ampiezza h , inclinato di 45 gradi rispetto alla striscia come mostra la figura. La striscia viene avvolta, mantenendola in



tensione, attorno al cilindro. Osservando ora il cilindro, si nota una spirale rossa data dalla striscia e una spirale bianca data dalla parte di cilindro non coperta dalla striscia. Quanto deve valere l'ampiezza h della striscia rossa se vogliamo che le due spirali abbiano la stessa ampiezza?

- A) $\sqrt{2}$ B) π C) 4 D) 2π E) Un valore diverso dai precedenti



2011
Categoria Junior

1. Risposta **A)** Ogni intero dispari p può essere scritto nella forma $p = 2n + 1$ con n intero opportuno. Si ha $2n + 1 = n + (n + 1)$.
2. Risposta **C)** Siano C, D, E, F i vertici del trapezio ordinati in senso antiorario a partire da quello in basso a sinistra. Siano H, K, J, M le proiezioni ortogonali sulla base maggiore CD rispettivamente di A, F, E, B e siano O e N le intersezioni di AB rispettivamente con FK e con EJ . I triangoli CHA e AOF <resp. MDB e NBE > sono congruenti e la loro area è metà dell'area del rettangolo $HKOA$ <resp. $JMBN$ >. I rettangoli $KJNO$ e $ONEF$ hanno la stessa area. Dunque l'area del trapezio $CDEF$ è il doppio dell'area del rettangolo $HMBA$.
3. Risposta **B)** $20 + 22 = 42$ è la somma del triplo della lunghezza dei lati corti con il triplo della lunghezza dei lati lunghi. Il perimetro è allora $42 \times 2/3$.
4. Risposta **D)** I primi tre addendi delle somme che esprimono X, Y e Z sono rispettivamente del tipo $n(n + 1), n^2, (n - 1)n$ con $n = 122$. Lo stesso vale per i secondi e i terzi addendi rispettivamente con $n = 123$ e $n = 124$. Essendo n positivo si ha $(n - 1)n < n^2 < n(n + 1)$.
5. Risposta **A)** La somma delle cardinalità dei tre insiemi formati rispettivamente dagli spettatori non italiani, dalle spettatrici femmine e dai non vegetariani è 100, quindi i tre insiemi possono essere disgiunti.
6. Risposta **C)** Sia x la misura in centimetri del lato di ogni piastrella. Si deve avere $24 \times 5x = 360$, da cui $x = 3$.
7. Risposta **D)** Scriviamo, in ordine decrescente e fino a 2011, la lista dei numeri che soddisfano la proprietà richiesta: 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020, 2011.
8. Risposta **C)** Siano V e O i segmenti che appaiono rispettivamente verticale e orizzontale. V si può ottenere ruotando O di 90 gradi in verso orario con centro in A oppure con centro in D (è sufficiente eseguire la verifica sugli estremi). Naturalmente il viceversa vale scambiando il verso. Invece rotazioni con centri in B o C non producono l'effetto desiderato. Infatti, per esempio, i punti medi dei due segmenti hanno distanze diverse sia da B , sia da C .
9. Risposta **E)** Ogni angolo esterno di un esagono regolare misura 240° , quindi i triangoli in figura sono equilateri, e il perimetro richiesto misura 12.
10. Risposta **E)** Sommando i punti di due facce combacianti, 5 può essere ottenuto solo nella forma $2 + 3$ o $4 + 1$. La faccia superiore del primo dado dal basso può quindi riportare 2 o 3 o 4 punti. 2 porterebbe ad avere 3 sulla faccia inferiore del secondo dado e quindi 4 su quella superiore, dunque 1 su quella inferiore del terzo dado e quindi 6 su quella superiore. Ragionando

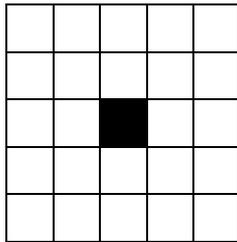
analogamente, sono da scartare 3 e 4, in quanto porterebbero ad avere rispettivamente 5 e 6 sulla faccia superiore del secondo dado.

11. Risposta **B)** Il mese di cui si parla all'inizio deve necessariamente avere 31 giorni e iniziare di lunedì. Il mese precedente allora termina di domenica: avendo solo 4 domeniche, è necessariamente febbraio (di un anno non bisestile). Dunque il mese successivo è aprile che ha 30 giorni e inizia di giovedì, avendo così 5 venerdì, 4 sabati e 4 domeniche.
12. Risposta **B)** Alla fine della gara Fernando e Sebastian, che si sono scambiati posizione un numero pari di volte, sono nello stesso ordine in cui sono partiti, mentre si è invertito l'ordine, dato che si sono scambiati un numero dispari di volte, tra Michael e Fernando e tra Michael e Sebastian. L'ordine sarà quindi Fernando, Sebastian, Michael.
13. Risposta **A)** Si ha $9^n + 9^n + 9^n = 3 \times 9^n = 3^{2n+1}$. Da $2011 = 2n + 1$ segue $n = 1005$.
14. Risposta **D)** Ognuno dei numeri mancanti compare in due delle quattro sotto-griglie 2×2 ; inoltre 2 compare in tutte e quattro e gli altri numeri in una sola. Detta S la somma cercata, deve dunque aversi $2S = 40 - 8 - 8 = 24$ da cui $S = 12$. (È effettivamente possibile completare la griglia come richiesto, ad esempio ponendo nelle 4 caselle libere, partendo dall'alto e in verso orario, 6, 2, 3, 1.
15. Risposta **C)** Se Daniela dice il vero, Ada mente, Bice dice il vero e Carla mente. Se Daniela mente, Ada dice il vero, Bice mente e Carla dice il vero. In ogni caso, due ragazze mentono e due dicono la verità.
16. Risposta **D)** Non si possono annerire celle che stanno nella seconda riga e/o nella seconda colonna. Indichiamo, procedendo da sinistra a destra, con A, B, C le celle rimaste della prima riga (dunque B è la terza e C la quarta), con D, E, F le celle rimaste della terza riga e con G, H, I le celle rimaste della quarta riga. È possibile annerire le celle delle cinque quaterne $ABDI, ABFG, ACDH, ACEG, BCDG$. Poiché due delle tre celle ammissibili della prima riga vanno annerite, non vi sono altre possibilità.
17. Risposta **B)** È chiaro che conviene iniziare assumendo che la prima cifra sia dispari, ad esempio 3: in questo modo si hanno già 100 interi ammissibili. Inoltre sono ammissibili anche gli 11 interi da 289 a 299 inclusi, mentre non lo sono 288 e 400. Ovviamente, partendo da ciascuna delle cifre 5, 7 o 9 la situazione sarebbe identica.
18. Risposta **E)** Un decimetro cubo equivale ad un litro. Detta x la lunghezza in decimetri del lato del cubo piccolo, si deve avere $217 = (x + 1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$. Ne segue $x = 8$ da cui $x^3 = 512$.
19. Risposta **C)** La via dove abita Chiara interseca due volte due delle altre strade: poiché almeno una di queste è una retta, non può esserlo la via di Chiara.

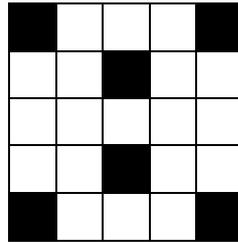
20. Risposta **B)** Tutte le frazioni hanno sia numeratore sia denominatore positivo. La B) ha lo stesso numeratore della A), ma denominatore minore, dunque è maggiore. La C), la D) e la E) possono venire riscritte rispettivamente come $x/(y + 1/2)$, $x/(y - 1/2)$ e $x/(y + 1/3)$: ora ciascuna ha il numeratore uguale a quello della B), ma denominatore maggiore, dunque ciascuna è minore della B).
21. Risposta **E)** La diagonale di ogni adesivo è lunga la metà dello spigolo del cubo, dunque 5 cm; l'area di ogni adesivo è allora $25/2 \text{ cm}^2$. Su ognuna delle sei facce del cubo la superficie che appare dorata equivale a tre adesivi.
22. Risposta **C)** La quaterna di cifre che stanno dal secondo posto in poi determina la prima cifra e si vede immediatamente che deve contenere 0. L'unica quaterna ammissibile che non contiene 1 è $\{0,2,3,4\}$; vi sono sei diverse quaterne che contengono 1: $\{0,1,2,3\}$, $\{0,1,2,4\}$, $\{0,1,2,5\}$, $\{0,1,2,6\}$, $\{0,1,3,4\}$, $\{0,1,3,5\}$. Ogni quaterna, permutando in tutti i modi possibili le quattro cifre da cui è composta, fornisce 24 numeri diversi.
23. Risposta **B)** Se il triangolo ABC è rettangolo in B con gli angoli in A e C rispettivamente di 60° e 30° , i punti D e E possono scelti in modo tale che gli angoli denotati (nella figura del testo) con 1, 2, 8 e 9 misurino 30° ciascuno, gli angoli denotati con 3 e 7 misurino 120° ciascuno e quelli denotati con 4, 5 e 6 misurino 60° ciascuno. È quindi possibile che vi siano solo 3 misure a due a due distinte. D'altra parte è chiaro che ve ne devono essere almeno 3. Infatti, ad esempio, se angoli 3 e 4 sono uguali, devono essere retti: allora l'angolo 6 deve essere acuto e l'angolo 7 ottuso. Se gli angoli 3 e 4 sono diversi, uno di essi deve essere ottuso: se è il 3, il 2 e il 4 devono essere necessariamente entrambi acuti, ma diversi fra loro poiché le rette AB e AD non sono parallele; analogamente si ragiona con gli angoli 3 e 5 se ad essere ottuso è l'angolo 4.
24. Risposta **D)** Se $\{a_1 a_2 \dots a_8 a_9\}$ è un allineamento dei nove interi da 1 a 9, la somma delle relative medie che Marco ottiene è $(a_1 + a_2)/2 + (a_2 + a_3)/2 + \dots + (a_7 + a_8)/2 + (a_8 + a_9)/2 = (a_1 + a_9 + 2a_2 + \dots + 2a_8)/2$: è evidente allora che tale somma risulta massimizzata quando a_1 e a_9 sono 1 e 2 o viceversa, essendo ininfluente la posizione dei rimanenti 7 interi. Basta allora eseguire il calcolo per una di queste configurazioni, ad esempio $\{1 3 4 5 6 7 8 9 2\}$.
25. Risposta **C)** Chiamiamo γ e Γ rispettivamente i cerchi di raggio minore e maggiore (1). Il valore cercato è la differenza tra metà dell'area di γ e l'area del segmento circolare di Γ contenuto in γ individuato da AB . Chiaramente AB è lungo $\sqrt{2}$ (infatti l'angolo ASB è retto perché AB è un diametro di γ), quindi metà dell'area di γ vale $\pi/4$; il segmento circolare è quanto rimane del settore circolare retto SAB di Γ , chiaramente di area $\pi/4$, dopo aver tolto il triangolo rettangolo SAB , chiaramente di area $1/2$.
26. Risposta **A)** Le quaterne i cui spigoli sono tutti paralleli fra loro sono evidentemente 3. Ognuna delle due coppie di spigoli paralleli di ognuna delle 6 facce individua una e una sola delle rimanenti quaterne (quella in cui è presente la coppia di spigoli della faccia opposta ortogonali ad essa). Chiaramente nel prodotto 2×6 ognuna di queste rimanenti quaterne viene contata due volte.

27. Risposta **B)** L'equazione è evidentemente soddisfatta da $k = 1$. Non può essere soddisfatta da altri valori di k . Infatti $k + 1$ e $k + 2$ sono interi consecutivi (dunque uno dei due è pari): allora, se $k > 1$, si ha necessariamente « $k + 1$ » = « $k + 2$ ». Ne segue che, se $k > 1$, « $k + 1$ » + « $k + 2$ » è un intero pari maggiore di 2 e dunque non può essere un numero primo.

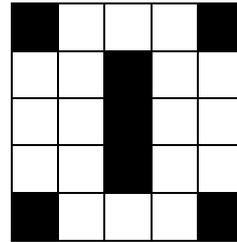
28. Risposta **E)** Le 4 figure qui sotto indicano le celle da annerire per i casi $n = 1, 2, 3, 4$ rispettivamente. Per $n = 5, 6, 7, 8$, chiaramente il caso n si ottiene annerendo le celle complementari a quelle annerite per il caso $9 - n$.



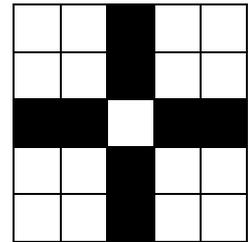
$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$



$n = 4$

29. Risposta **C)** Sia F il punto medio di BC . I triangoli ADF e EDF sono isosceli e congruenti con i lati AF, FD, DF e FE di uguale misura, inferiore a quella di AD e DE . Basta osservare allora che l'angolo FDE è minore dell'angolo AFD .

30. Risposta **E)** Se la striscia rossa fosse tanto ampia da coprire esattamente il cilindro (senza sovrapposizioni), la sua ampiezza sarebbe la lunghezza della semicirconferenza di diametro $4\sqrt{2}$ (diagonale del quadrato di lato 4). Nel nostro caso deve essere la metà di tale lunghezza, dunque $\pi\sqrt{2}$.