

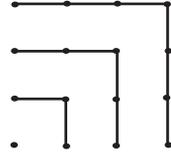


Kangourou Italia
Gara del 18 marzo 2010
Categoria Student
Per studenti di quarta o quinta della
secondaria di secondo grado



I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. La figura suggerisce come ottenere per via grafica l'uguaglianza $1 + 3 + 5 + 7 = 4 \times 4$. Con quale dei seguenti prodotti coincide la somma $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 27 + 29 + 31$?



- A) 11×11 B) 16×16 C) 18×18
 D) 19×19 E) 21×21

2. Che numero devi sostituire al simbolo *, se vuoi che la somma dei numeri presenti nella prima riga sia uguale a quella dei numeri presenti nella seconda?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	2010
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	*

- A) 1010 B) 1020 C) 1910 D) 1990 E) 2000

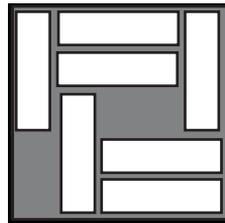
3. Quanti numeri composti da quattro cifre tutte dispari sono divisibili per cinque?

- A) 900 B) 625 C) 250 D) 125 E) 120

4. Il direttore di una società ha detto "Ognuno dei nostri impiegati ha almeno 25 anni". Si è poi saputo che la sua affermazione è falsa. Allora è vero che

- A) tutti gli impiegati della società hanno esattamente 25 anni.
 B) tutti gli impiegati della società hanno almeno 26 anni.
 C) nessuno degli impiegati della società ha 25 anni.
 D) qualche impiegato della società ha meno di 25 anni.
 E) qualche impiegato della società ha esattamente 26 anni.

5. Nella scatola, che in figura vedi dall'alto, ci sono sette barrette uguali: ognuna di esse ha base rettangolare di lati 1 cm e 3 cm. È possibile far scivolare alcune barrette senza sollevarle in modo che nella scatola ci sia posto per un'altra barretta con le stesse misure? In caso di risposta affermativa, qual è il minimo numero di barrette che basta far scivolare?



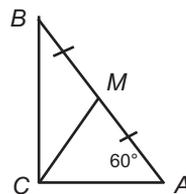
- A) Sì, 2 B) Sì, 3 C) Sì, 4
 D) Sì, 5 E) No, è impossibile

Student



6. Il triangolo ABC è retto, M è il punto medio dell'ipotenusa AB e l'angolo in A misura 60 gradi. Quanti gradi misura l'angolo BMC?

- A) 105 B) 108 C) 110
 D) 125 E) Un numero diverso dai precedenti



7. Quale tra i seguenti può essere il numero degli spigoli di un prisma?
 A) 100 B) 200 C) 2008 D) 2009 E) 2010

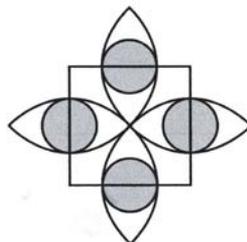
8. In un sacchetto ci sono palline di tre colori: blu, verde e rosso (ce n'è almeno una per ogni colore). Sappiamo che, se estraiamo a caso 5 palline, certamente ce ne saranno almeno due rosse ed almeno tre saranno dello stesso colore. Quante palline blu ci sono nel sacchetto?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4
 E) Impossibile rispondere senza qualche informazione sul numero di palline verdi.

9. La media aritmetica di un insieme di 2000 numeri è 2000. Aggiungiamo all'insieme 2010 nuovi numeri: la media aritmetica di tutti i 4010 numeri adesso è 2010. La media aritmetica dei 2010 numeri che abbiamo aggiunto è

- A) minore di 2010. B) 2010. C) maggiore di 2010 e minore di 2020.
 D) 2020. E) maggiore di 2020.

10. Il quadrato in figura ha il lato lungo 2. Ogni semicirconferenza ha centro in un vertice del quadrato e passa per il centro del quadrato. Ogni cerchio ombreggiato ha centro su un lato del quadrato ed è tangente alle due semicirconferenze che tagliano quel lato. Quanto misura l'area della regione ombreggiata?



- A) $4(3 - 2\sqrt{2}) \pi$ B) $\sqrt{2} \pi$ C) $\frac{\sqrt{3}}{4} \pi$
 D) π E) $\frac{1}{4} \pi$

Student

I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. I tre numeri $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{7}$ sono termini consecutivi di una progressione geometrica. Il termine successivo della progressione è

- A) $\sqrt[9]{7}$. B) $\sqrt[12]{7}$. C) $\sqrt[5]{7}$. D) $\sqrt[10]{7}$. E) 1.

12. Per quanti numeri interi positivi di due cifre, accade che la cifra x delle decine e la cifra y delle unità soddisfano l'equazione

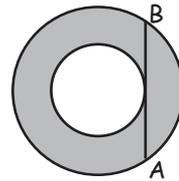
$$(x - 8)^3 + (y - 1)^2 = 0?$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5



13. Nella corona circolare in figura, la corda AB è tangente alla circonferenza interna ed ha lunghezza 16. Qual è l'area della corona circolare?

- A) 32π B) 63π C) 64π D) $32\pi^2$
 E) Dipende dai raggi dei cerchi

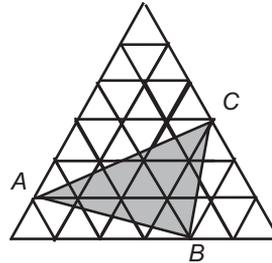


14. I numeri interi x ed y soddisfano l'equazione $2x = 5y$. Solo uno dei seguenti numeri può essere $x + y$. Quale?

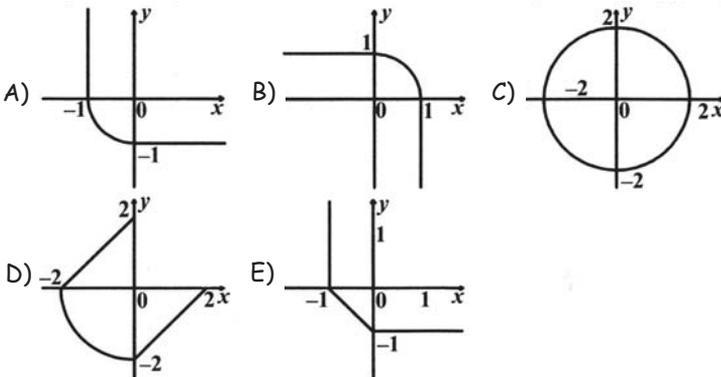
- A) 2011 B) 2010 C) 2009 D) 2008 E) 2007

15. Osserva la figura. Il triangolo grande è costruito accostando 36 triangoli equilateri, ciascuno di area 1. Quanto vale l'area del triangolo ABC?

- A) 11 B) 12 C) 13
 D) 14 E) 15



16. Quale dei seguenti è l'insieme delle soluzioni dell'equazione $(x - |x|)^2 + (y - |y|)^2 = 4$?



Student

17. Quanti triangoli rettangoli si possono formare congiungendo tre vertici di un poligono regolare di 14 lati? (Triangoli non aventi gli stessi vertici, anche se ottenibili uno dall'altro per rotazione del poligono, vanno considerati diversi.)

- A) 42 B) 84 C) 88 D) 98 E) 168

18. Nell'espressione $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$ ogni asterisco può essere rimpiazzato a scelta da "+" o da "x" (somma o prodotto). Sia N il più grande fra i valori dell'espressione ottenibili in tal modo. Qual è il più piccolo fattore primo di N? (Si ricordi che "1" non è un numero primo.)

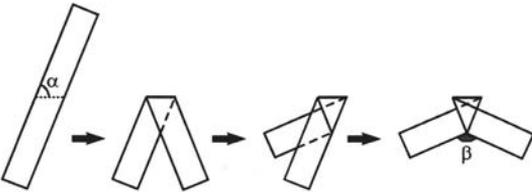
- A) 2 B) 3 C) 5 D) 7

E) Un valore diverso dai precedenti



19. Le lunghezze dei lati di un triangolo sono i numeri naturali 13, x e y . Trovare il perimetro del triangolo sapendo che $xy = 105$.
 A) 35 B) 39 C) 51 D) 69 E) 119

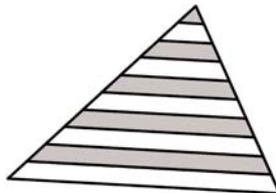
20. Un nastro di carta è stato piegato tre volte, come illustrato in figura. Trovare la misura in gradi dell'angolo β , sapendo che la misura in gradi dell'angolo α , che ha determinato la prima piegatura, è 70.



- A) 140 B) 130
 C) 120 D) 110
 E) 100

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

21. Due lati del triangolo grande in figura sono suddivisi ciascuno in 10 segmenti uguali, che determinano le strisce evidenziate. Quale percentuale dell'area del triangolo risulta ombreggiata?



- A) 42,5% B) 45% C) 46%
 D) 47,5% E) 50%

22. 100 persone prendono parte ad una gara di corsa, facendo tempi a due a due diversi fra loro. Alla domanda su quale sia stato il suo piazzamento, ogni partecipante risponde dicendo un numero, naturalmente tra 1 e 100. La somma di tutte le risposte fornite è 4000. Qual è il numero minimo di partecipanti che devono avere mentito?

- A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

23. Lanciamo tre volte un dado. Se il numero ottenuto al terzo lancio è la somma dei numeri ottenuti nei primi due, qual è la probabilità che, nei tre lanci, sia apparso almeno una volta un due?

- A) 1/6 B) 91/216 C) 1/2 D) 8/15 E) 7/12

24. Un codice a barre del tipo mostrato in figura è composto di strisce bianche e nere alternate, con la striscia iniziale e quella finale sempre nera. Ogni striscia è di ampiezza 1 o 2 e l'ampiezza totale è 12. Quanti differenti codici si possono costruire? (Ogni codice va letto da sinistra verso destra.)



- A) 24 B) 132 C) 66
 D) 12 E) 116

Student



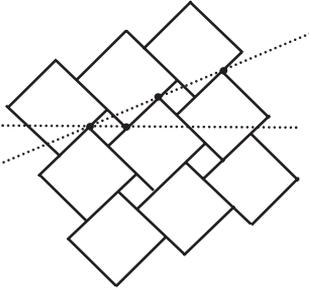
25. Sia f una funzione a valori reali definita sull'insieme dei numeri reali strettamente positivi tale che

$$2f(x) + 3f\left(\frac{2010}{x}\right) = 5x$$

per ogni $x > 0$. Quanto vale $f(6)$?

- A) 1 B) 2009 C) 1013
 D) 923 E) Un numero diverso dai precedenti

26. Una superficie è piastrellata con piastrelle quadrate di due dimensioni diverse, come mostrato in figura. Le piastrelle più grandi hanno lato di lunghezza a , le più piccole di lunghezza b . Le due rette punteggiate (che passano per i punti indicati, che sono intersezioni di lati di quadrati) formano un angolo di 30 gradi di ampiezza. Quanto vale $a : b$?



- A) $2 \cdot \sqrt{3}$ B) $2 + \sqrt{3}$ C) $3 + \sqrt{2}$
 D) $3 \cdot \sqrt{2}$ E) 2

27. Ogni numero naturale da 1 a 10 è stato scritto dieci volte su una lavagna. Uno studente cancella due numeri dalla lavagna e al loro posto scrive la loro somma diminuita di uno; poi un altro studente cancella due dei numeri sulla lavagna e scrive al loro posto la loro somma diminuita di uno e così via finché sulla lavagna resta un solo numero. Il numero rimasto è

- A) minore di 440. B) 451. C) 460.
 D) 488. E) maggiore di 500.

28. Trova quanto vale l'espressione

$$\frac{(2+3)(2^2+3^2)\dots(2^{1024}+3^{1024})(2^{2048}+3^{2048})+2^{4096}}{3^{2048}}$$

- A) 2^{2048} B) 2^{4096} C) 3^{2048}
 D) 3^{4096} E) $3^{2048} + 2^{2048}$

29. Nella rappresentazione decimale del numero

$$\sqrt{0,\underbrace{444\dots 4}_{100 \text{ volte}}}$$

(dove la cifra "4" viene scritta esattamente 100 volte), qual è la centesima cifra dopo la virgola?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

30. Per quanti interi primi p è vero che il numero $307p + 4$ è un quadrato perfetto?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 5 E) Infiniti

Student



2010
Categoria Student

1. Risposta **B)** Per avere 31 punti sulla spezzata esterna occorre avere due lati con 16 punti ciascuno (il vertice è comune): quindi la somma vale 16^2 .
2. Risposta **C)** La somma dei primi 10 termini della seconda riga è maggiore di 100 della somma dei corrispondenti termini della prima: il numero cercato è quindi 1910.
3. Risposta **D)** L'ultima cifra deve essere 5; per le prime tre ho cinque scelte ciascuna, quindi 5^3 .
4. Risposta **D)** La negazione dell'affermazione data è D.
5. Risposta **B)** Poiché l'area libera è di 4 cm^2 , si potrà inserire al massimo una barretta. Basta far scivolare in basso di 2 cm la barretta verticale in alto a sinistra e far scivolare a sinistra di 1 cm le due barrette orizzontali in alto: vicino alla barretta verticale a destra rimane il posto per l'ottava barretta. Dal momento che, se vengono fatte scivolare meno di tre barrette, queste devono necessariamente essere scelte fra le tre di cui sopra, è chiaro che con meno di tre barrette non si può raggiungere lo scopo.
6. Risposta **E)** Il lato AC è lungo metà dell'ipotenusa, quindi il triangolo CAM è isoscele e, avendo l'angolo al vertice CAM di 60° , equilatero. L'angolo BMC , supplementare di CMA , misura 120° .
7. Risposta **E)** Il numero dei lati di ciascuna base è uguale al numero degli spigoli che congiungono le basi: il numero totale degli spigoli deve quindi essere multiplo di 3. Tra i numeri assegnati, lo è solo 2010.
8. Risposta **A)** Per essere sicuri di avere 3 palline dello stesso colore estraendone 5, occorre e basta che nel sacco ci siano solo due palline di colore diverso da quello, ed esse saranno di colori diversi tra loro perché abbiamo palline di 3 colori. So che ce ne sono almeno 2 rosse, quindi una sola blu (ed una sola verde).
9. Risposta **C)** Detta M la media dei 2010 numeri aggiunti, abbiamo che $2000 \times 2000 + 2010 \times M = 4010 \times 2010$, da cui segue subito che deve essere $M > 2010$; se fosse $M \geq 2020$, visto che 2010 è la media tra 2000 e 2020, e che il numero degli addendi con media $M \geq 2020$ è maggiore del numero di addendi con media 2000, la media dei 4010 addendi sarebbe strettamente maggiore di 2010.
10. Risposta **A)** Il raggio delle semicirconferenze è $\sqrt{2}$, quindi il raggio di ciascuno dei cerchi ombreggiati è $\sqrt{2} - 1$, e la sua area è $(3 - 2\sqrt{2})\pi$.
11. Risposta **E)** Si ha $\sqrt{7} : \sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{7} : \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{7}$ quindi il termine successivo è $\sqrt[4]{7} : \sqrt[5]{7} = 1$.

12. Risposta **D)** L'uguaglianza $a^3 = -b^2$, con $-8 \leq a \leq 1$ e $-1 \leq b \leq 8$, è vera se e solo se è verificato uno dei casi seguenti: $a = b = 0$; $a = -1$ e $b = \pm 1$; $a = -4$ e $b = 8$. Ai quattro casi corrispondono, per la coppia (x, y) , i valori: $(8,1)$; $(7,0)$ e $(7,2)$; $(4,9)$.

13. Risposta **C)** Detti R ed r i raggi delle due circonferenze, si ha $R^2 - r^2 = 64$; l'area della corona circolare è $R^2\pi - r^2\pi = 64\pi$.

14. Risposta **C)** L'uguaglianza dice che deve esistere un k intero tale che $x = 5k$ ed $y = 2k$; deve allora essere $x + y = 7k$ e l'unico multiplo di 7 tra i numeri proposti è 2009.

15. Risposta **A)** Dette l e h rispettivamente le misure di base ed altezza dei triangoli piccoli, la parte ombreggiata è equivalente ad un triangolo con base che misura $\frac{11}{3}l$ ed altezza $3h$; la sua area è 11 volte quella di un triangolo piccolo, cioè 11.

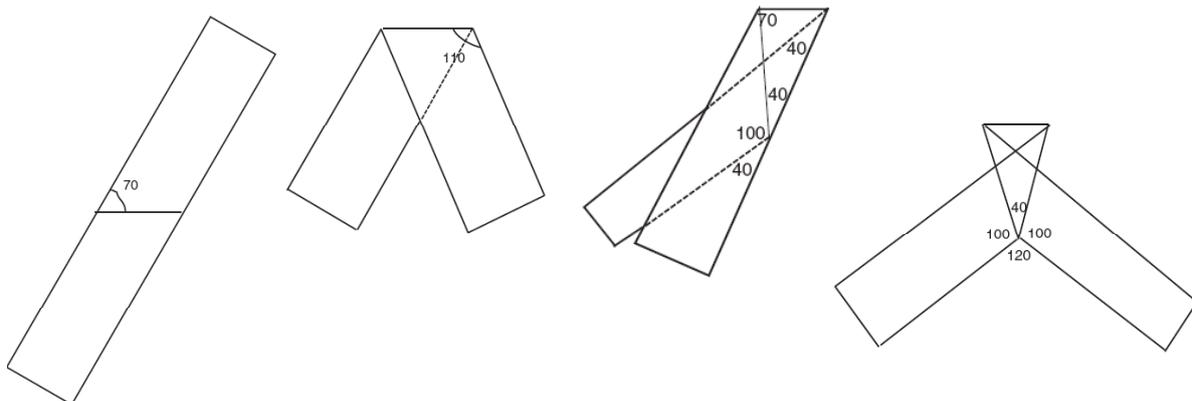
16. Risposta **A)** Osservando che non esistono coppie con $x, y > 0$ che soddisfano l'equazione e che nel terzo quadrante l'equazione si riduce a $x^2 + y^2 = 1$, concludiamo che il grafico può essere solo A).

17. Risposta **B)** Un poligono regolare è inscritto in una circonferenza: per formare dei triangoli rettangoli occorre scegliere due dei vertici del triangolo agli estremi di un diametro, mentre il terzo può essere uno qualunque dei vertici rimasti del poligono. Abbiamo 7 scelte per la coppia di vertici su uno stesso diametro e, per ciascuna di esse, 12 scelte del terzo vertice: in totale 84 scelte.

18. Risposta **E)** Tutti i numeri con cui abbiamo a che fare sono interi positivi. Se n è qualunque e k è diverso da 1, nk è più grande di $n+k$, quindi il numero più grande ottenibile sarà $1 + 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10$ che, essendo il successore di un multiplo di ciascuno dei primi 10 interi, non sarà divisibile per nessuno di essi, tranne 1.

19. Risposta **A)** Le coppie di numeri naturali (x,y) il cui prodotto dà 105 sono $(3,35)$, $(5,21)$ e $(7,15)$; l'unica che soddisfa la proprietà $|y-x| < 13$ è $(7,15)$.

20. Risposta **C)**



21. Risposta **B)** Ciascuna striscia bianca è ottenibile dall'unione di un insieme equivalente alla striscia grigia sopra di lei (ad esempio il simmetrico della striscia grigia rispetto al segmento che le separa) e di due triangoli congruenti al triangolo grigio al vertice della figura: la differenza tra l'area della parte bianca e quella della parte grigia è 10 volte l'area del triangolo al vertice cioè $\frac{10}{100}$ dell' area del triangolo. La percentuale di triangolo grigia è allora il 45%.

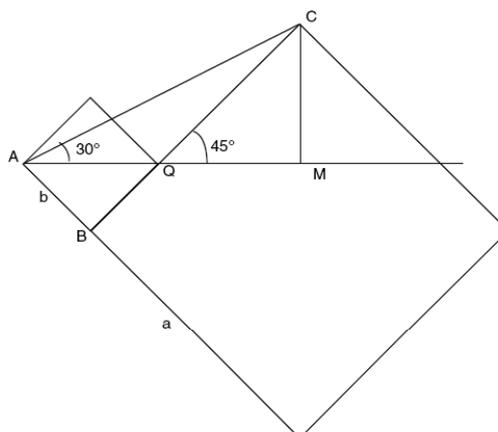
22. Risposta **D)** La somma di tutti i piazzamenti effettivi è la somma dei primi 100 interi, cioè 5050 mentre la somma dei piazzamenti dichiarati è 4000; per ottenerla con il minimo numero di risposte false occorre e basta che siano gli ultimi n classificati a dichiarare di essere arrivati primi: il 100° farà così scendere la somma di 99, il 99° di 98, ecc.. Per calcolare n osserviamo che $\sum_1^n (100 - k) = 100n - \frac{n(n+1)}{2}$: dalla formula è ovvio che n dovrà essere maggiore di 10; per $n = 11$ la sommatoria vale $1034 < 1050$, per $n = 12$ la sommatoria vale $1122 > 1050$ e concludiamo che sono 12 le persone che hanno mentito, ma al più 11 di esse hanno sostenuto di essere arrivate prime.

23. Risposta **D)** Contiamo i casi possibili (tutti equiprobabili) in cui il terzo numero ottenuto è la somma dei primi due: occorre che al primo lancio esca un numero da 1 a 5: se è uscito 1 avremo 5 numeri accettabili come secondo estratto, se è uscito 2 ne avremo 4 e così via, mentre il terzo numero è determinato dai primi due; in totale avremo $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ casi possibili. I casi in cui compare almeno un 2 sono la terna (1,1,2), le 4 terne con 2 al primo posto e le 3 terne con 2 al secondo posto ma un numero diverso da 2 al primo, in totale 8 casi.

24. Risposta **E)** Il numero delle strisce deve essere dispari, perché sia la prima che l'ultima sono nere, e può essere solo 11, 9 o 7 perché l'ampiezza massima di una striscia è 2. Nei tre casi ci saranno rispettivamente 1, 3 e 5 strisce di ampiezza 2; possiamo contare i diversi codici ottenibili contando le permutazioni di n oggetti di cui k uguali tra loro e i rimanenti $n - k$ pure uguali tra loro, con $n = 11, 9$ e 7 e $k = 1, 3$ e 5 rispettivamente. Otteniamo i valori 11, 84 e 21: in totale 116 codici diversi.

25. Risposta **E)** Dando ad x il valore 6 otteniamo $2f(6) + 3f(335) = 30$; dando a x il valore 335 otteniamo $2f(335) + 3f(6) = 1675$; risolvendo il sistema nelle incognite $f(6)$ e $f(335)$ abbiamo $f(6) = 993$.

26. Risposta **B)**



Con riferimento alla figura, si ha $\overline{AC} = 2\overline{CM} = \sqrt{2\overline{CQ}}$ cioè $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}(b - a)$, da cui $a / b = 2 \pm \sqrt{3}$ e, dato che $a > b$, $a / b = 2 + \sqrt{3}$.

27. Risposta **B)** Ad ogni passaggio diminuisce di 1 il numero dei numeri scritti sulla lavagna e di 1 la loro somma. All'inizio c'erano 100 numeri con somma 550 (dieci volte la somma degli interi da 1 a 10); dopo 99 passaggi resta un solo numero, che è $550 - 99 = 451$.

28. Risposta **C)** Spezziamo la frazione nella somma di due frazioni, con lo stesso denominatore e per numeratore ciascuno dei due addendi del numeratore; la prima frazione, moltiplicando numeratore e denominatore per $(3-2)\prod(3^{2^k} - 2^{2^k})$, applicando le regole dei prodotti notevoli e semplificando i fattori comuni diventa $\frac{3^{4096} - 2^{4096}}{3^{2048}}$; sommandole la seconda e semplificando otteniamo 3^{2048} .

29. Risposta **E)** Osserviamo che $\sqrt{0,444...4} = \frac{2}{3}\sqrt{0,999...9}$ e che tutte le prime 100 cifre dopo la virgola di $\sqrt{0,999...9}$ sono 9 perché $\sqrt{0,999...9} > 0,999...9$. Allora le prime 100 cifre dopo la virgola di $\frac{1}{3}\sqrt{0,999...9}$ sono dei 3 e, osservando che la 101-sima cifra di tale numero è 3, e quindi non può dare origine a un riporto nella moltiplicazione per 2, possiamo concludere che la cifra cercata è 6.

30. Risposta **B)** Se $307p + 4 = n^2$, dall'uguaglianza $307p = (n-2)(n+2)$ otteniamo che 307 e p , dato che sono primi, devono coincidere con i due fattori; non può essere $307 = n+2$, perché avremmo $p=303$, non primo, e quindi l'unica scelta possibile è $307 = n-2$ e $p=311$, primo.