Kangourou della Matematica 2010
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 10 maggio 2010

LIVELLO STUDENT

FOGLIO PER IL CONCORRENTE. ATTENZIONE: TUTTE LE RISPOSTE DEVONO ESSERE MOTIVATE!

S1. (*5 punti*) Ciascuno dei tre numeri interi positivi consecutivi 22, 23, 24 ha la seguente proprietà: gli esponenti a cui, nella sua fattorizzazione in numeri primi, compaiono elevati i suoi fattori primi sono tutti dispari. Qual è il più alto numero di interi positivi consecutivi ciascuno dei quali goda di questa proprietà?

S2. (*7 punti*) Per ogni intero positivo n minore di 10^9, definiamo numero "sommario di n " il numero di 3 cifre ABC dove A, B e C sono rispettivamente il numero di tutte le cifre, delle cifre dispari e delle cifre pari di n. (Per esempio, il sommario di 2010 è 413). Quali sono i numeri n tali che il sommario del sommario del sommario di n sia 321?

S3. (*11 punti*) Due giocatori hanno a disposizione una griglia quadrata 2010 × 2010 e una pila (praticamente inesauribile) di monete. Il gioco consiste nel mettere a turno una moneta in un quadrato della griglia, cercando di fare in modo che quattro monete vengano a determinare i vertici di un rettangolo con i lati paralleli ai lati della griglia. Vince il primo giocatore che, in presenza di tre monete già collocate, mette la quarta così da realizzare il rettangolo. Esiste una strategia vincente? In caso affermativo, a vantaggio di quale dei due giocatori: il primo o il secondo a giocare?

S4. (*14 punti*) Siano:

- ABC un triangolo equilatero;
- D, E, F rispettivamente i punti medi di BC, CA e AB;
- P, Q, R rispettivamente i punti medi AF, BD e CE.

I segmenti DP, EQ, FR intersecandosi individuano un triangolo: qual è il rapporto tra l'area di tale triangolo e quella di ABC?

S5. (*18 punti*) Per quali interi positivi $n \geq 4$ è possibile mettere in ogni cella di una griglia $n \times n$ un numero intero relativo in modo che la somma di tutti i numeri inseriti sia positiva, ma la somma dei numeri inseriti in ogni sotto-griglia 3 × 3 sia negativa? (Per "sotto-griglia" si intende una griglia ottenuta troncando righe e colonne adiacenti della griglia di partenza, senza operare permutazioni su righe o colonne.)

S6. (*22 punti*) Quattordici amici si incontrano ad una festa: fra di essi vi è Marco, un tipo strano e disattento, ma con buona memoria. Marco vuole andarsene prima della fine: saluta 10 degli amici e se ne va. Dopo poco, ritorna: saluta ancora 10 amici (non necessariamente gli stessi di prima) e se ne va. Stessa cosa poco dopo, e così via (sempre salutandone 10 per volta) fino a quando tutti gli amici sono stati salutati almeno una volta. A quel punto non ritorna più e si accorge che non ci sono due amici che abbia salutato lo stesso numero di volte. Il numero dei suoi "ritorni" alla festa è il più piccolo che consente il verificarsi delle due circostanze: qual è?

LIVELLO STUDENT

S1. (*5 punti*) Ciascuno dei tre numeri interi positivi consecutivi 22, 23, 24 ha la seguente proprietà: gli esponenti a cui, nella sua fattorizzazione in numeri primi, compaiono elevati i suoi fattori primi sono tutti dispari. Qual è il più alto numero di interi positivi consecutivi ciascuno dei quali goda di questa proprietà?

Soluzione: 7.
È chiaro che, comunque scelti 8 interi consecutivi, fra di essi vi sono due diversi multipli di quattro: siano n e $n + 4$. Sia $n = 2^k H$ con k e H dispari, $k \geq 3$: allora nella fattorizzazione di $n + 4 = 2^2(2^{k-2}H + 1)$ il fattore primo 2 compare elevato ad un esponente pari. D'altra parte, la sequenza {29, 30, …, 34, 35} è composta da 7 numeri consecutivi che soddisfano la richiesta.

S2. (*7 punti*) Per ogni intero positivo n minore di 10^9, definiamo numero "sommario di n" il numero di 3 cifre ABC dove A, B e C sono rispettivamente il numero di tutte le cifre, delle cifre dispari e delle cifre pari di n. (per esempio, il sommario di 2010 è 413). Quali sono i numeri n tali che il sommario del sommario del sommario di n sia 321?

Soluzione: tutti.
Il sommario di un qualunque numero $n < 10^9$ è un numero di 3 cifre: se il numero di cifre di n è pari potrà assumere la forma *PPP* oppure *PDD* (qui *D* sta per "dispari" e *P* sta per "pari"); se è dispari potrà assumere la forma *DDP* oppure *DPD.* I corrispondenti sommari sono 303 nel primo caso e 321 negli altri 3: il sommario di ciascuno di questi due numeri vale 321.

S3. (*11 punti*) Due giocatori hanno a disposizione una griglia quadrata 2010 × 2010 e una pila (praticamente inesauribile) di monete. Il gioco consiste nel mettere a turno una moneta in un quadrato della griglia, cercando di fare in modo che quattro monete vengano a determinare i vertici di un rettangolo con i lati paralleli ai lati della griglia. Vince il primo giocatore che, in presenza di tre monete già collocate, mette la quarta così da realizzare il rettangolo. Esiste una strategia vincente? In caso affermativo, a vantaggio di quale dei due giocatori: il primo o il secondo a giocare?

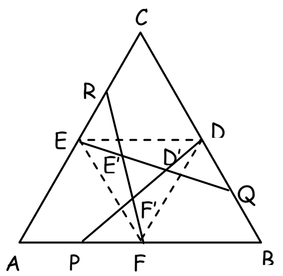
Soluzione: esiste, a vantaggio del secondo.
È sufficiente ripartire le colonne della griglia in 1005 coppie (ad esempio la prima con la seconda, la terza con la quarta e così via). Quando il primo giocatore inserisce una moneta, egli individua una coppia di colonne: allora il secondo ne inserisce un'altra nella casella adiacente appartenente alla stessa riga e alla colonna rimasta libera fra le due della coppia individuata. Dopo al più 1005 mosse il primo giocatore è costretto a mettere una moneta in una colonna dove ve ne è già una: a quel punto il secondo giocatore può realizzare la disposizione rettangolare.

S4. (*14 punti*) Siano:

- ABC un triangolo equilatero;
- D, E, F rispettivamente i punti medi di BC, CA e AB;
- P, Q, R rispettivamente i punti medi AF, BD e CE.

I segmenti DP, EQ, FR intersecandosi individuano un triangolo: qual è il rapporto tra l'area di tale triangolo e quella di ABC?

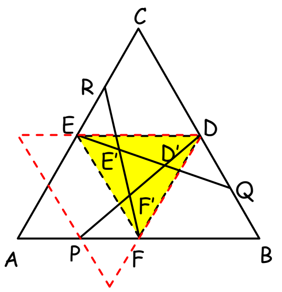
Soluzione: 1/28.

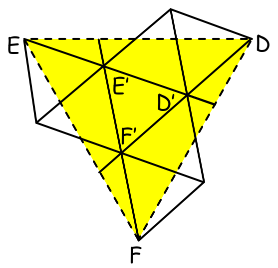


Siano D', E', F' rispettivamente i punti di intersezione di DP ed EQ, di EQ ed FR e di DP ed FR: per motivi di simmetria, il triangolo $D'E'F'$ è equilatero. Inoltre cade all'interno del triangolo DEF (ad esempio D', intersezione di DP ed EQ sta nel rombo $BDEF$ in quanto appartenente ad EQ e nel rombo $AEDF$ in quanto appartenente a DP e quindi nella loro intersezione, cioè in DEF).
Quindi basta trovare il rapporto tra l'area di $D'E'F'$ e quella di DEF e poi dividere per 4.

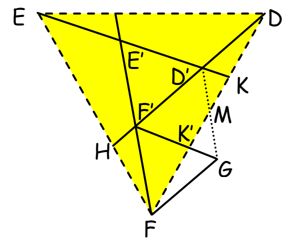
Allo scopo osserviamo che DP interseca EF in un punto H tale che HF è lungo 1/3 di EF e similmente per gli altri segmenti.

Infatti, se AP (e quindi PF) ha lunghezza 1, il triangolo equilatero che ha vertice in D e lato opposto passante per P e parallelo a EF [vedi figura] ha lato di lunghezza 3 e P dista 1 dal vertice più vicino di tale triangolo. Per similitudine anche $HF = EF/3$.





L'idea è di verificare che il triangolo DEF è equivalente a 7 triangolini uguali a $D'E'F'$ come suggerisce la figura riportata qui a fianco.
Su DF denotiamo con K la sua intersezione con EQ e con K' il punto tale che $FK'=DF/3$ e quindi tale che $FK'=FH$.



Ruotando il triangolo $FF'H$ di 60° in verso orario intorno ad F si ha il triangolo FGK' il cui angolo in G misura 60° (come l'angolo $FF'H$, che ha tale misura in quanto opposto al vertice di $E'F'D'$) e quindi K' è allineato con F' e G, vertici del triangolo $F'FG$ equilatero (in quanto isoscele con angolo al vertice $F'FG$ che misura 60°). Ne consegue che:

- il quadrilatero $F'HFK'$ è equivalente al triangolo $F'FG$;
- $F'K'$ ed EK sono paralleli (poiché gli angoli alterni interni $D'F'G$ e $F'D'E'$ misurano 60°) e visto che $K'K=KD$ anche $F'D'=D'D$ (teorema di Talete).

Anche il quadrilatero $KD'F'K'$ è equivalente al triangolo $GD'F'$ che è uguale a $D'E'F'$ (in quanto ha un lato in comune con esso ed è isoscele con angolo al vertice in F' che misura 60°). Infatti i due triangoli GMK' e $D'MK$ sono uguali in quanto $K'G = HF' = D'K$ e sono uguali i due angoli adiacenti a $K'G$ e $D'K$ (alterni interni tagliati sulle due rette parallele EK e $F'G$ dalle due trasversali KK' e $D'G$).
Riproducendo queste operazioni su ciascun lato del triangolo DEF si vede che tale triangolo è equivalente all'unione di 7 triangoli equilateri uguali a $D'E'F'$ e quindi l'area di $D'E'F'$ è 1/7 di quella di DEF e 1/28 di quella di ABC.

Nota: poiché rapporti di segmenti allineati e rapporti di aree sono invarianti per affinità e, fissati due triangoli non degeneri, esiste una ed una sola affinità che trasforma l'uno nell'altro, l'ipotesi che il triangolo sia equilatero è inessenziale.

S5. (*18 punti*) Per quali interi positivi $n \geq 4$ è possibile mettere in ogni cella di una griglia $n \times n$ un numero intero relativo in modo che la somma di tutti i numeri inseriti sia positiva, ma la somma dei numeri inseriti in ogni sotto-griglia 3×3 sia negativa? (Per "sotto-griglia" si intende una griglia ottenuta troncando righe e colonne adiacenti della griglia di partenza, senza operare permutazioni su righe o colonne.)

Soluzione: per tutti gli interi che non sono multipli di 3.
Se n è multiplo di 3 è possibile esprimere la griglia accostando $(n/3)^2$ griglie 3×3 a due a due disgiunte: è dunque impossibile raggiungere lo scopo.
È invece possibile raggiungerlo se $n = 3k + 1$ o $n = 3k + 2$ con k intero opportuno, $k \geq 1$.
Un'idea può essere quella di iterare in modo evidente disposizioni come quelle qui suggerite per $n = 7 = 3 \cdot 2 + 1$ e $n = 8 = 3 \cdot 2 + 2$

1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	- 9	1	1	- 9	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1
1	1	- 9	1	1	- 9	1
1	1	1	1	1	1	1

1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	- 9	1	1	- 9	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	- 9	1	1	- 9	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

scegliendo in modo opportuno i due numeri a e b da inserire rispettivamente al posto di 1 e di – 9.
La somma relativa ad ogni griglia 3×3 diventa allora $8a + b$, mentre quella relativa alla griglia completa diventa, nel caso $n = 3k + 1$ a noi più sfavorevole,

$$k^2 b + ((3k + 1)^2 - k^2)a = ((3k + 1)^2 - 9k^2)a + k^2(b + 8a).$$

Questa quantità è positiva quando $(6k + 1)a > - k^2(b + 8a)$, il che si verifica ad esempio scegliendo $a = k$ e $b = - (8k + 1)$.

S6. (*22 punti*) Quattordici amici si incontrano ad una festa: fra di essi vi è Marco, un tipo strano e disattento, ma con buona memoria. Marco vuole andarsene prima della fine: saluta 10 degli amici e se ne va. Dopo poco, ritorna: saluta ancora 10 amici (non necessariamente gli stessi di prima) e se ne va. Stessa cosa poco dopo, e così via (sempre salutandone 10 per volta) fino a quando tutti gli amici sono stati salutati almeno una volta. A quel punto non ritorna più e si accorge che non ci sono due amici che abbia salutato lo stesso numero di volte. Il numero dei suoi "ritorni" alla festa è il più piccolo che consente il verificarsi delle due circostanze: qual è?

Soluzione: 32.
Sia n il numero dei ritorni. Ogni volta che Marco ha salutato gli amici (compresa la prima, quando era già alla festa), ne ha trascurati 3 per un totale di $3(n + 1)$ "dimenticanze". L'ultimo amico salutato è stato trascurato n volte. Supponiamo che sia possibile che, fra i dodici rimanenti, uno non sia mai stato trascurato, un altro lo sia stato una sola volta, un terzo solo due e così via fino a undici volte. È chiaro che, se realizzabile, questa situazione minimizza il numero di ritorni. Deve dunque essere $3(n + 1) \geq 0 + 1 + 2 + \ldots + 11 + n = 66 + n$, da cui $n \geq 32$. Non resta che provare che questa situazione può essersi realmente verificata. Numerati gli amici da 1 a 13, per ognuna delle 33 volte in cui Marco ha salutato indichiamo di seguito i tre amici trascurati: {13, 11, 10} nelle prime 10 volte, {13, 11, 9} nell'undicesima volta, {13, 8, 9} nelle successive 8 volte, {13, 7, 6} nelle successive 6 volte, {13, 7, 5} nella ventiseiesima volta, {13, 4, 5} nelle successive 4 volte, {13, 3, 2} nelle successive due volte e infine {11, 3, 1} nell'ultima volta.