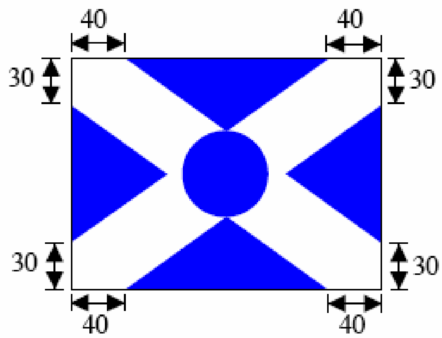
Kangourou della Matematica 2009
Coppa a squadre Kangourou – semifinale
Mirabilandia, 9 maggio 2009

Quesiti

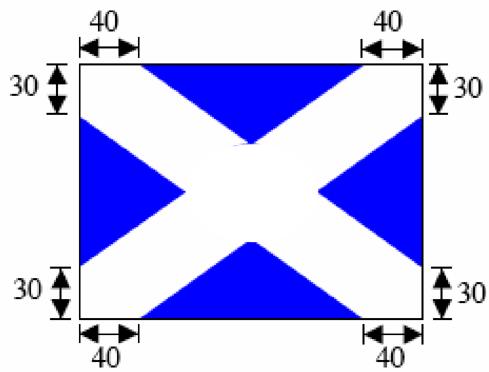
1. Hai una buona mira?
Hai 11 palline: 6 colorate di rosso, indistinguibili fra loro, e 5 colorate di verde, indistinguibili fra loro. Tenti di lanciarle in una scatola aperta: alcune (eventualmente nessuna) entreranno nella scatola, altre (eventualmente nessuna) finiranno fuori. Quanti sono i possibili diversi esiti ? (Ad esempio: un esito è “3 palline verdi e 2 rosse nella scatola, le altre fuori”, un esito diverso è “3 palline rosse e 2 verdi nella scatola, le altre fuori”.)

2. Quadrati perfetti
Considera tutti i numeri interi da 1 a 10.000, compresi 1 e 10.000: quale percentuale di essi è costituita da numeri che sono quadrati perfetti (cioè che sono il quadrato di qualche numero intero)?

3. La bandiera con il cerchio
Nella figura (che non è in scala) vedete una bandiera rettangolare colorata di bianco e di grigio i cui lati orizzontali sono lunghi 240 cm e i cui lati verticali sono lunghi 150 cm. Nella bandiera appare una croce bianca con i bracci a lati paralleli le cui misure sono determinate come indicato nella figura. Nel centro della croce è centrato un disco grigio; sulla sua circonferenza giacciono i vertici dei due triangoli isosceli grigi superiore e inferiore. Quanti centimetri è lungo il raggio del disco?



4. La bandiera senza il cerchio
Nella figura (che non è in scala) vedete una bandiera rettangolare colorata di bianco e di grigio i cui lati orizzontali sono lunghi 240 cm e i cui lati verticali sono lunghi 150 cm. Nella bandiera appare una croce bianca con i bracci a lati paralleli le cui misure sono determinate come indicato nella figura (esattamente come nel quesito precedente, ma ora il cerchio non c’e’ più). Quanto vale in centimetri quadrati l’area della croce bianca? ATTENZIONE: non riportare nella risposta la cifra delle unità (ad esempio, se la risposta fosse 10123, dovresti riportare solo 1012)



5. La scacchiera

Avete a disposizione una scacchiera 8 × 8 (come quella della dama o degli scacchi) e 50 pedine. Volete disporre sulla scacchiera le pedine in modo che:

1) ogni pedina stia esattamente dentro qualche casella e non ce ne sia più di una in ogni casella;
2) coppie di caselle occupate da pedine non abbiano lati in comune (pur potendo avere un vertice in comune);
3) da qualunque casella rimasta libera si possa raggiungere ogni altra casella libera, solo passando in verticale o in orizzontale su altre caselle libere, senza scavalcare pedine.

Qual è il massimo numero di pedine che potete disporre sulla scacchiera?

6. Prima di Martina

Martina è nata il 9 maggio dell'anno scorso a mezzogiorno. Sua mamma è nata il 9 maggio del 1983 sempre a mezzogiorno. Quante notti ha vissuto la mamma di Martina prima che nascesse Martina?

7. La carta millimetrata

Su un foglio di carta millimetrata, dove cioè è presente un reticolo di quadretti di un millimetro di lato, è evidenziato un rettangolo di dimensioni 350×210 millimetri con i lati paralleli alle righe già presenti sul foglio e i vertici coincidenti con vertici dei quadretti. Quanti vertici di quadretti incontra ciascuna delle diagonali di questo rettangolo?

8. Il triangolo suddiviso

I lati di un triangolo sono lunghi 40, 50 e 60 centimetri. Tracciando un segmento con un estremo nel vertice relativo all'angolo più piccolo e l'altro estremo sul lato opposto, il triangolo viene suddiviso in due triangoli che hanno lo stesso perimetro. Quanti centimetri è lungo il più corto dei due segmenti in cui viene suddiviso quel lato?

9. Maschi e femmine

In una sala sono presenti alcune persone: se il numero dei maschi viene diviso per il numero delle femmine, si ottiene esattamente 0,24. Si sa che il numero di persone presenti è il più piccolo che può determinare quel rapporto. Quante persone vi sono in quella sala?

10. I dadi truccati

Due dadi uguali (ciascuno con le facce numerate da 1 a 6, come d'uso) sono truccati: lanciando uno qualunque di essi, la faccia con il numero 1 non può mai uscire e la probabilità che esca una delle rimanenti facce è proporzionale al numero riportato sulla faccia. Lanciandoli, quante probabilità su 100 vi sono che una delle facce riporti un numero pari e l'altra un numero dispari?

11. I cippi chilometrici

Due città *A* e *B* sono collegate da una ferrovia lunga 999 chilometri. Lungo la ferrovia, intervallati di un chilometro, vi sono dei cippi che indicano la distanza da *A* e da *B* nell'ordine, del tipo

[0, 999] (in *A*), [1, 998], [2, 997], … , [998, 1], [999, 0] (in *B*).

Quanti di questi cippi ospitano due e non più di due cifre diverse fra loro?

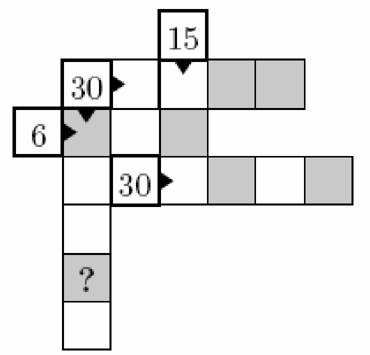
12. Un prodotto di 98 fattori

Esprimete il valore del seguente prodotto

$$(1 - 2/3) \times (1 - 2/4) \times (1 - 2/5) \times \ldots \times (1 - 2/99) \times (1 - 2/100)$$

mediante una frazione che abbia per numeratore e denominatore degli interi positivi e sia ridotta ai minimi termini. Scrivete il denominatore della frazione.

13. La griglia



Quella in figura è una griglia irregolare in alcune delle cui caselle compaiono già dei numeri. Devi riempire le restanti caselle utilizzando solo numeri interi da 1 a 9 inclusi (uno per casella) e rispettando tutte le regole seguenti:

- le caselle grigie devono ospitare solo numeri dispari, quelle bianche solo numeri pari;
- nessun numero può comparire più di una volta in una stessa riga;
- nessun numero può comparire più di una volta in una stessa colonna;
- in ogni riga e in ogni colonna in cui compare la freccia, la somma dei numeri a partire dalla casella con la freccia, nella direzione indicata dalla freccia, deve essere uguale al numero indicato nella casella precedente la freccia.

Quale numero devi inserire nella casella indicata dal punto di domanda?

14. L'antiprisma

Chiamiamo *antiprisma* un solido con le seguenti proprietà:

- è dotato di due basi quadrate che giacciono su piani paralleli;
- il centro di ogni base sta sulla perpendicolare condotta dal centro dell'altra e ciascun lato di ogni base è parallelo a una diagonale dell'altra;
- le facce laterali sono triangoli ottenuti congiungendo ciascun vertice di ciascuna base con i due vertici dell'altra ad esso più vicini.

Quante facce (incluse le basi) e quanti spigoli possiede un antiprisma? ***Scrivete nell'ordine prima il numero delle facce, poi quello degli spigoli*** (ad esempio, se le facce fossero 6 e gli spigoli 11, scrivete 0611).

15. L'ultima cifra

Con quale cifra termina il numero $2^{2009} + 3^{2009} + 5^{2009} + 7^{2009}$?

1. Hai una buona mira?

Hai 11 palline: 6 colorate di rosso, indistinguibili fra loro, e 5 colorate di verde, indistinguibili fra loro. Tenti di lanciarle in una scatola aperta: alcune (eventualmente nessuna) entreranno nella scatola, altre (eventualmente nessuna) finiranno fuori. Quanti sono i possibili diversi esiti ? (Ad esempio: un esito è "3 palline verdi e 2 rosse nella scatola, le altre fuori", un esito diverso è "3 palline rosse e 2 verdi nella scatola, le altre fuori".)

Risposta: 0042
Nella scatola potrà finire un numero di palline rosse compreso fra 0 e 6, per un totale dunque di 7 possibilità; per ciascuna di esse, nella scatola potrà finire un numero di palline verdi compreso fra 0 e 5, per un totale di 6 possibilità. $7 \times 6 = 42$.

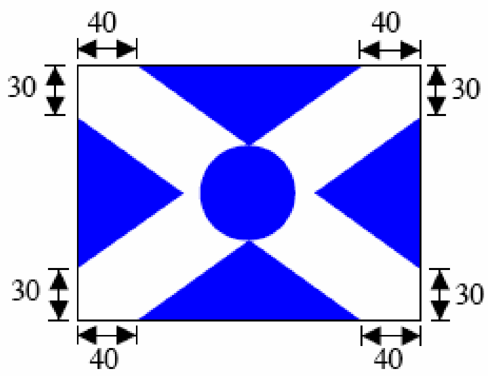
2. Quadrati perfetti

Considera tutti i numeri interi da 1 a 10.000, compresi 1 e 10.000: quale percentuale di essi è costituita da numeri che sono quadrati perfetti (cioè che sono il quadrato di qualche numero intero)?

Risposta: 0001
10.000 è il quadrato di 100: poiché il quadrato di un numero intero positivo cresce al crescere del numero, fra gli interi positivi tutti e soli i numeri fra 1 e 100 hanno il quadrato compreso fra 1 e 10.000. Essi sono esattamente un centesimo dei numeri compresi fra 1 e 10.000.

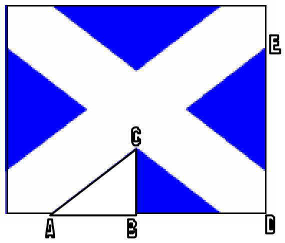
3. La bandiera con il cerchio

Nella figura (che non è in scala) vedete una bandiera rettangolare colorata di bianco e di grigio i cui lati orizzontali sono lunghi 240 cm e i cui lati verticali sono lunghi 150 cm. Nella bandiera appare una croce bianca con i bracci a lati paralleli le cui misure sono determinate come indicato nella figura. Nel centro della croce è centrato un disco grigio; sulla sua circonferenza giacciono i vertici dei due triangoli isosceli grigi superiore e inferiore. Quanti centimetri è lungo il raggio del disco?



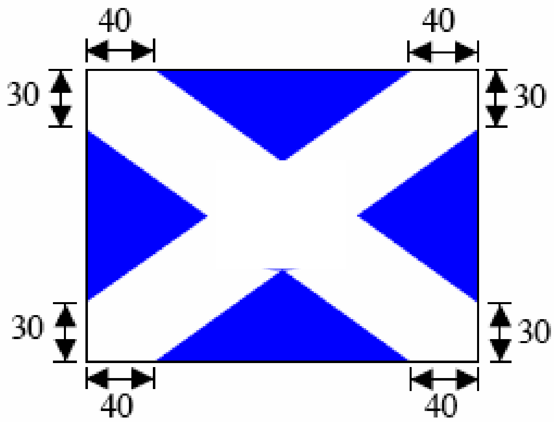
Risposta: 0027

I triangoli *ABC* e *ADE* sono simili. Poiché *AB*, *AD* e *DE* sono lunghi rispettivamente 80, 200 e 120 cm, ne segue che *BC* è lungo 120 × 80 : 200 = 48 cm, per cui il diametro del cerchio è 150 – 48 × 2 = 54 cm.



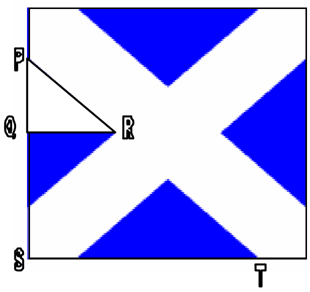
4. La bandiera senza il cerchio

Nella figura (che non è in scala) vedete una bandiera rettangolare colorata di bianco e di grigio i cui lati orizzontali sono lunghi 240 cm e i cui lati verticali sono lunghi 150 cm. Nella bandiera appare una croce bianca con i bracci a lati paralleli le cui misure sono determinate come indicato nella figura (esattamente come nel quesito precedente, ma ora il cerchio non c'e' più). Quanto vale in centimetri quadrati l'area della croce bianca? ATTENZIONE: non riportare nella risposta la cifra delle unità (ad esempio, se la risposta fosse 10123, dovresti riportare solo 1012)



Risposta: 2157(0)

Dal quesito precedente sappiamo che *BC* è lungo 48 cm. Analogamente, per similitudine fra i triangoli *PQR* e *PST*, si ricava che *QR* è lungo 75 cm. Si ha 240 × 150 – (90 × 75 + 160 × 48) = 21570.



5. La scacchiera

Avete a disposizione una scacchiera 8 × 8 (come quella della dama o degli scacchi) e 50 pedine. Volete disporre sulla scacchiera le pedine in modo che:

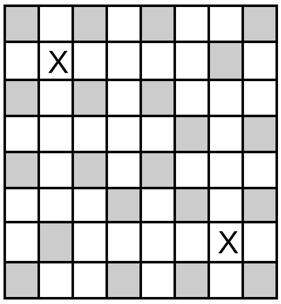
1) ogni pedina stia esattamente dentro qualche casella e non ce ne sia più di una in ogni casella;
2) coppie di caselle occupate da pedine non abbiano lati in comune (pur potendo avere un vertice in comune);
3) da qualunque casella rimasta libera si possa raggiungere ogni altra casella libera, solo passando in verticale o in orizzontale su altre caselle libere, senza scavalcare pedine.

Qual è il massimo numero di pedine che potete disporre sulla scacchiera?

Risposta: 0021

Questo è un tipico quesito per il quale non è molto difficile ipotizzare quale possa essere la risposta corretta, mentre la giustificazione rigorosa della correttezza, che qui forniamo, richiede un certo impegno.

In figura viene esibita una disposizione accettabile di 21 pedine (le caselle occupate sono quelle grigie).



Non è possibile disporne di più. Infatti osserviamo che:

a) per poter passare da ogni casella libera ad un'altra è cruciale avere un "sufficiente" numero di lati di caselle libere da poter attraversare, che chiameremo lati di "collegamento". Se le caselle libere sono N, ne servono almeno $N - 1$: nel caso di 21 caselle occupate (e quindi $64 - 21 = 43$ libere) servono almeno $43 - 1 = 42$ lati di "collegamento". Nella configurazione proposta, i lati di "collegamento" sono addirittura 44, poiché su ciascuna delle due caselle indicate con la lettera X si può arrivare da due caselle diverse;
b) i lati di "collegamento" sono i lati delle caselle libere non appartenenti al bordo della scacchiera né in comune con caselle occupate: per massimizzarli conviene occupare le caselle sui bordi in modo da non sprecare lati di "collegamento";
c) il massimo numero di caselle sui bordi che possono essere occupate, stante il vincolo di non essere adiacenti, è 12: dei $7 \times 8 \times 2$ lati che non giacciono sul bordo della scacchiera queste caselle ne assorbono almeno $3 \times 8 + 2 \times 4 = 32$: restano quindi al massimo 80 lati e ogni casella non sul bordo che si va ad occupare con una pedina rimuove 4 lati dal numero dei possibili lati di "collegamento";
d) in particolare, se si sistemano nelle caselle interne 9 pedine, si lasciano liberi al massimo 44 lati di "collegamento"; se se ne inserisse una in più, ne resterebbero 40; ma in questo caso le caselle libere sarebbero 42 e sarebbero necessari 41 lati di "collegamento" per poter raggiungere tutte le caselle.

Quindi non è possibile inserire nelle caselle interne 10 pedine ed avere complessivamente 22 pedine sulla scacchiera.

6. Prima di Martina

Martina è nata il 9 maggio dell'anno scorso a mezzogiorno. Sua mamma è nata il 9 maggio del 1983 sempre a mezzogiorno. Quante notti ha vissuto la mamma di Martina prima che nascesse Martina?

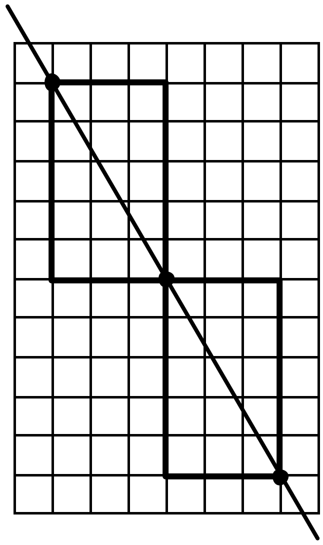
Risposta: 9132

Da mezzogiorno del 9 maggio di qualunque anno a mezzogiorno del 9 maggio dell'anno successivo vi sono 365 notti se l'anno successivo non è bisestile, 366 se lo è. Tra il 9 maggio 1983 e il 9 maggio 2008 sono trascorsi 25 anni, di cui 7 bisestili (incluso il 2008, che influisce sul conteggio in quanto il 29 febbraio precede il 9 maggio; sono bisestili tutti gli anni espressi da un numero multiplo di 4 che non sia anche multiplo di 100 o che sia multiplo di 400, ad esempio 2000). In totale dunque le notti sono $365 \times (2008 - 1983) + 7 = 9132$.

7. La carta millimetrata

Su un foglio di carta millimetrata, dove cioè è presente un reticolo di quadretti di un millimetro di lato, è evidenziato un rettangolo di dimensioni 350×210 millimetri con i lati paralleli alle righe già presenti sul foglio e i vertici coincidenti con vertici dei quadretti. Quanti vertici di quadretti incontra ciascuna delle diagonali di questo rettangolo?

Risposta: 0071



La frazione 350/210 ridotta ai minimi termini, semplificando per 70, diventa 5/3. Per questioni di similitudine fra triangoli rettangoli, affinché una diagonale di un rettangolo (con i lati paralleli alle righe presenti sul foglio e i vertici coincidenti con vertici dei quadretti) non incontri vertici di quadretti che non siano vertici del rettangolo, è necessario e sufficiente che le misure (in millimetri) dei due lati del rettangolo siano due interi primi fra loro, come 5 e 3. Ognuna delle nostre due diagonali è ottenibile accostando in successione 70 segmenti di uguale lunghezza ciascuno dei quali, a parte l'ultimo, ha un estremo in comune con il segmento successivo ed è diagonale di un rettangolo 5×3 nel quale dunque non interseca vertici di quadretti se non gli estremi (v. figura). Complessivamente allora i vertici intersecati sono 70 + 1.

8. Il triangolo suddiviso

I lati di un triangolo sono lunghi 40, 50 e 60 centimetri. Tracciando un segmento con un estremo nel vertice relativo all'angolo più piccolo e l'altro estremo sul lato opposto, il triangolo viene suddiviso in due triangoli che hanno lo stesso perimetro. Quanti centimetri è lungo il più corto dei due segmenti in cui viene suddiviso quel lato?

Risposta: 0015

L'angolo più piccolo è quello opposto al lato più corto, cioè al lato lungo 40 cm. Poiché i due triangoli ottenuti hanno lo stesso perimetro e hanno in comune esattamente un lato (quello costituito dal segmento tracciato), la differenza di 10 cm fra il lato di 60 e quello di 50 cm va compensata ripartendo i 40 cm del terzo lato in 15 + 25 cm.

9. Maschi e femmine

In una sala sono presenti alcune persone: se il numero dei maschi viene diviso per il numero delle femmine, si ottiene esattamente 0,24. Si sa che il numero di persone presenti è il più piccolo che può determinare quel rapporto. Quante persone vi sono in quella sala?

Risposta: 0031

Se m è il numero dei maschi e f quello delle femmine, sappiamo che deve essere $m/f = 24/100$, dunque $100m = 24f$, cioè $25m = 6f$. Il numero che cerchiamo è il minimo valore che può assumere la somma $m + f$ quando m e f sono interi positivi e soddisfano questa uguaglianza. Poiché 25 e 6 sono primi fra loro, si deduce che deve essere $m = 6$ e $f = 25$.

10. I dadi truccati

Due dadi uguali (ciascuno con le facce numerate da 1 a 6, come d'uso) sono truccati: lanciando uno qualunque di essi, la faccia con il numero 1 non può mai uscire e la probabilità che esca una delle rimanenti facce è proporzionale al numero riportato sulla faccia. Lanciandoli, quante probabilità su 100 vi sono che una delle facce riporti un numero pari e l'altra un numero dispari?

Risposta: 0048

La somma degli interi da 2 a 6 inclusi è 20: nelle nostre ipotesi, se una faccia riporta il numero n ? 1, ha dunque n/20 probabilità di uscire; di conseguenza, la probabilità che esca una faccia con un numero pari è 12/20, con un numero dispari è 8/20. Allora la probabilità che escano due facce entrambe con numeri pari è $(12/20)^2$ = 144/400, quella che escano due facce entrambe con numeri dispari è $(8/20)^2$ = 64/400: la probabilità richiesta è dunque (400 – 144 – 64)/400 = 192/400 = 48/100.

11. I cippi chilometrici

Due città *A* e *B* sono collegate da una ferrovia lunga 999 chilometri. Lungo la ferrovia, intervallati di un chilometro, vi sono dei cippi che indicano la distanza da *A* e da *B* nell'ordine, del tipo

[0, 999] (in *A*), [1, 998], [2, 997], … , [998, 1], [999, 0] (in *B*).

Quanti di questi cippi ospitano due e non più di due cifre diverse fra loro?

Risposta: 0040

Per ogni cippo, la somma dei suoi due numeri deve dare 999: se quindi in uno dei numeri compare una cifra, nell'altro numero nella stessa posizione deve comparire il complemento a 9 di quella cifra (il caso in cui il complemento sia 0 e non compaia in quanto in posizione non significativa non pregiudica la correttezza di questa argomentazione) . Quindi le sole coppie non ordinate di cifre diverse che possono comparire sui cippi di cui si chiede il numero sono le 5 coppie (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5). Ognuna di esse dà origine a 8 diversi cippi: per esempio la coppia (0, 9) dà origine ai 4 cippi [0, 999], [9, 990], [99, 900], [909, 90] e ai 4 cippi che da questi si ottengono scambiando 0 con 9 (e omettendo la cifra 0 dove non significativa). Complessivamente si contano dunque 5 × 8 = 40 cippi.

12. Un prodotto di 98 fattori

Esprimete il valore del seguente prodotto

$$(1 - 2/3) \times (1 - 2/4) \times (1 - 2/5) \times \ldots \times (1 - 2/99) \times (1 - 2/100)$$

mediante una frazione che abbia per numeratore e denominatore degli interi positivi e sia ridotta ai minimi termini. Scrivete il denominatore della frazione.

Risposta: 4950

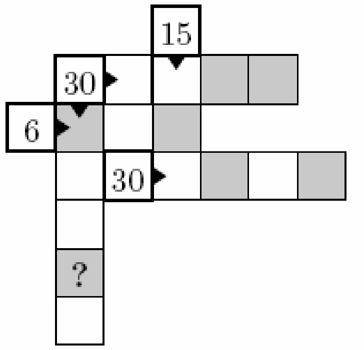
Per ogni *n* si ha $1 - 2/n = (n - 2)/n$; nel nostro caso n assume una e una sola volta tutti i valori interi da 3 a 100. Il nostro prodotto si può quindi scrivere nella forma

$$(1/3) \times (2/4) \times (3/5) \times \ldots \times (97/99) \times (98/100).$$

È chiaro che, opportunamente semplificando, a numeratore rimane solo il fattore 2 e a denominatore rimangono solo i fattori 99 e 100. Si ha 2 : (99 × 100) = 1/4950.

13. La griglia

Quella in figura è una griglia irregolare in alcune delle cui caselle compaiono già dei numeri. Devi riempire le restanti caselle utilizzando solo numeri interi da 1 a 9 inclusi (uno per casella) e rispettando tutte le regole seguenti:



- le caselle grigie devono ospitare solo numeri dispari, quelle bianche solo numeri pari;
- nessun numero può comparire più di una volta in una stessa riga;
- nessun numero può comparire più di una volta in una stessa colonna;
- in ogni riga e in ogni colonna in cui compare la freccia, la somma dei numeri a partire dalla casella con la freccia, nella direzione indicata dalla freccia, deve essere uguale al numero indicato nella casella precedente la freccia.

Quale numero devi inserire nella casella indicata dal punto di domanda?

Risposta: 0009

Per rispondere non occorre completare la griglia. Infatti, se si parte dalla riga i cui numeri devono dare per somma 6, si ottiene che la prima (da sinistra) casella può ospitare solo 1 o 3; passando ora alla colonna che contiene la casella con il punto di domanda, la somma dei due numeri dispari ospitati non può essere inferiore a 12 (infatti i numeri pari più alti 8, 6, 4 sommati danno 18): ne segue che per la prima casella della riga di cui sopra va scelto 3, e dunque che il numero cercato è 9.

14. L'antiprisma

Chiamiamo *antiprisma* un solido con le seguenti proprietà:

- è dotato di due basi quadrate che giacciono su piani paralleli;
- il centro di ogni base sta sulla perpendicolare condotta dal centro dell'altra e ciascun lato di ogni base è parallelo a una diagonale dell'altra;
- le facce laterali sono triangoli ottenuti congiungendo ciascun vertice di ciascuna base con i due vertici dell'altra ad esso più vicini.

Quante facce (incluse le basi) e quanti spigoli possiede un antiprisma? ***Scrivete nell'ordine prima il numero delle facce, poi quello degli spigoli*** (ad esempio, se le facce fossero 6 e gli spigoli 11, scrivete 0611).

Risposta: 1016

Ogni vertice di ciascuno dei quadrati che costituiscono le basi determina univocamente una faccia triangolare dell'antiprisma che abbia un lato sulla base opposta e viceversa (vertici diversi determinano facce diverse): le facce sono dunque in numero di $2 \times 4 + 2 = 10$.
Gli spigoli sono invece gli 8 appartenenti a una delle due basi e, fissata una base (non importa quale), i $2 \times 4 = 8$ uscenti dai vertici di quella base: in totale 16.

15. L'ultima cifra

Con quale cifra termina il numero $2^{2009} + 3^{2009} + 5^{2009} + 7^{2009}$?

Risposta: 0007

A partire dalla prima, le potenze di due terminano con 2, 4, 8, 6, 2, …
A partire dalla prima, le potenze di tre terminano con 3, 9, 7, 1, 3, …
Ogni potenza di cinque termina con 5.
A partire dalla prima, le potenze di sette terminano con 7, 9, 3, 1, 7, …
L'ultima cifra di ciascuna delle potenze si ripete dunque con cicli di ordine 4.
Poiché si ha 2009 = 2008 + 1 e 2008 è un multiplo di 4, ne segue che la cifra cercata è quella con cui termina il numero 2 + 3 + 5 + 7, dunque 7.