# Kangourou della Matematica 2009
# finale nazionale italiana
# Mirabilandia, 11 maggio 2009

## *LIVELLO STUDENT*

**S1.** (*5 punti*) Il numero $29^{28} + 4$ è primo? Giustifica la risposta.

**S2**. (*7 punti*) Considera una pila ordinata di 5.998 fogli numerati a partire da 1 (cioè il primo foglio in alto riporta il numero 1). Ora costruisci una nuova pila nel modo seguente: prendi il primo foglio, poni il secondo sopra il primo e il terzo sotto il primo; procedi quindi iterando il procedimento: il quarto foglio andrà sopra il secondo e il quinto sotto il terzo e così via. Una volta completata l'operazione, vi saranno dei fogli che, nella nuova pila, si troveranno nella stessa posizione in cui si trovavano nella vecchia? In caso affermativo, quali?

**S3.** (*11 punti*) Una formica è libera di muoversi sulla superficie di un parallelepipedo rettangolo di dimensioni $1 \times 1 \times 2$ metri, ma non di entrarvi all'interno. Partendo da un vertice**,** vuole raggiungere il vertice antipodale (cioè quello da esso più lontano) muovendosi lungo il cammino più breve possibile: quanta strada deve percorrere?
Il vertice opposto è il punto del parallelepipedo più lontano dal vertice di partenza (sempre se si è vincolati a muoversi sulla superficie)?

**S4.** (*14 punti*) Considera un poligono regolare di 21 lati. Vuoi colorarne di rosso alcuni vertici in modo che, comunque scelte due coppie di vertici entrambi colorati di rosso, la distanza fra i vertici di una coppia sia diversa da quella fra i vertici dell'altra. Quanti vertici puoi colorare al massimo?

**S5*.*** (*18 punti*) In alcuni vertici di un poligono regolare di 1000 lati vi sono alcune monete (ogni vertice può ospitarne nessuna, una o più di una). Una mossa consiste nelle operazioni seguenti: scegliere due monete e spostarne una nel vertice adiacente in senso orario e l'altra nel vertice adiacente in senso anti-orario. Partendo dalla situazione per la quale in ogni vertice vi è esattamente una moneta, è possibile arrivare con un numero finito di mosse ad avere

a) 8 mucchietti di 125 monete ciascuno?
b) 125 mucchietti di 8 monete ciascuno?

Giustifica entrambe le risposte.

**S6.** (*22 punti*) Siano $a$ un numero reale e $e$ un numero reale positivo arbitrario. Dimostrare che esistono due numeri interi non entrambi nulli $H$ e $K$ tali che $|H - Ka| < e$.

# Kangourou della Matematica 2009
## finale nazionale italiana
## Mirabilandia, 11 maggio 2009

### *LIVELLO STUDENT*

**S1.** (*5 punti*) Il numero $29^{28} + 4$ è primo? Giustifica la risposta.

**Soluzione:** no.
È molto facile vedere che ogni potenza pari di un numero la cui ultima cifra sia 9 ha come ultima cifra 1: se dunque a una qualsiasi potenza pari di un tale numero si aggiunge 4, si ottiene un numero la cui ultima cifra è 5, quindi non primo in quanto divisibile per 5 e maggiore di 5.
In alternativa si può scrivere

$$29^{28} + 4 = 29^{28} + 2^2 \times 29^{14} + 2^2 - 2^2 \times 29^{14} = (29^{14} + 2)^2 - (2 \times 29^7)^2,$$

intero comodamente fattorizzabile, in quanto differenza di due quadrati perfetti, in fattori entrambi chiaramente diversi da 1.

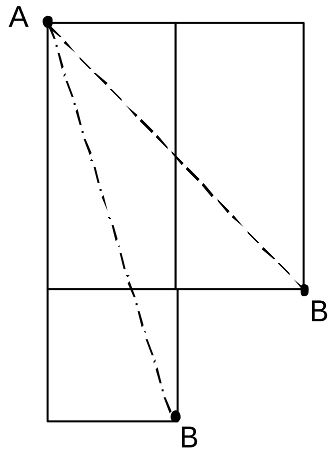
**S2**. (*7 punti*) Considera una pila ordinata di 5.998 fogli numerati a partire da 1 (cioè il primo foglio in alto riporta il numero 1). Ora costruisci una nuova pila nel modo seguente: prendi il primo foglio, poni il secondo sopra il primo e il terzo sotto il primo; procedi quindi iterando il procedimento: il quarto foglio andrà sopra il secondo e il quinto sotto il terzo e così via. Una volta completata l'operazione, vi saranno dei fogli che, nella nuova pila, si troveranno nella stessa posizione in cui si trovavano nella vecchia? In caso affermativo, quali?

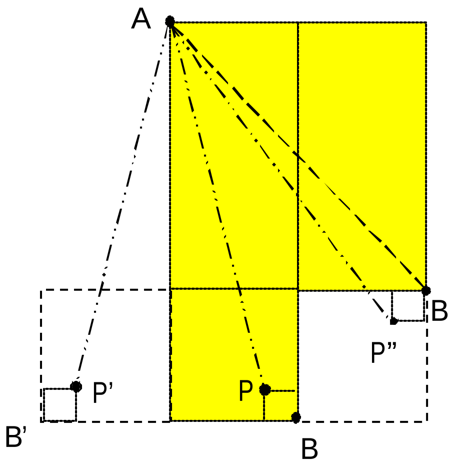
**Soluzione:** solo il foglio con il numero 2.000.
Nessun foglio (contrassegnato da un numero) dispari potrà rimanere nella stessa posizione: infatti, una volta completata l'operazione, si troverà preceduto, oltre che da tutti i fogli dispari che lo precedevano inizialmente, anche da tutti i fogli pari della pila (la sequenza termina con un foglio pari, dunque vi era almeno un foglio pari che inizialmente lo seguiva).
Sia allora $k$ intero pari, $k = 5.998$. Una volta completata l'operazione, il foglio $k$ si vedrà preceduto da tutti e soli i $5.998/2 - k/2$ fogli pari che lo seguivano nella disposizione iniziale: la sua nuova posizione sarà dunque $5.998/2 - k/2 + 1$. Uguagliando a $k$ si ottiene $k = 2.000$.

**S3.** (*11 punti*) Una formica è libera di muoversi sulla superficie di un parallelepipedo rettangolo di dimensioni 1 × 1 × 2 metri, ma non di entrarvi all'interno. Partendo da un vertice**,** vuole raggiungere il vertice antipodale (cioè quello da esso più lontano) muovendosi lungo il cammino più breve possibile: quanta strada deve percorrere?
Il vertice opposto è il punto del parallelepipedo più lontano dal vertice di partenza (sempre se si è vincolati a muoversi sulla superficie)?

**Soluzione:** $\sqrt{8}$, no.

La figura mostra una parte dello sviluppo del parallelepipedo sul piano, precisamente una faccia quadrata e due facce rettangolari adiacenti. Naturalmente è sufficiente considerare una coppia (*A*, *B*) di vertici antipodali qualsiasi. È chiaro che il cammino più breve da *A* a *B* vincolato alla superficie deve essere uno dei due indicati in figura I: il teorema di Pitagora permette di concludere che è quello che si svolge sulle due facce rettangolari ed è lungo $\sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ (l'altro è lungo $\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$).




Il punto *B* antipodale ad *A*, tuttavia, non è il punto del parallelepipedo più lontano da *A* lungo cammini vincolati alla superficie: ad esempio è più lontano da *A* il punto *P* sulla faccia quadrata indicato nella seconda figura, che dista 1/4 da ciascuno degli spigoli che confluiscono in *B*.
Infatti, comunque si consideri congiunta alle facce rettangolari la base quadrata, si trova che il segmento che congiunge *A* con *P* è lungo $\sqrt{9/16+121/16} = \sqrt{49/16+81/16} = \sqrt{130/16} > \sqrt{128/16} = \sqrt{8}$.

**S4.** (*14 punti*) Considera un poligono regolare di 21 lati. Vuoi colorarne di rosso alcuni vertici in modo che, comunque scelte due coppie di vertici entrambi colorati di rosso, la distanza fra i vertici di una coppia sia diversa da quella fra i vertici dell'altra. Quanti vertici puoi colorare al massimo?

**Soluzione**: 5.

I segmenti che congiungono due vertici qualunque del poligono assegnato sono esattamente di 10 lunghezze diverse. Detto $n$ il numero dei vertici colorati di rosso, i segmenti che l congiungono a coppie sono $\frac{n(n-1)}{2}$; poiché li vogliamo tutti di lunghezza diversa deve essere $\frac{n(n-1)}{2} \le 10$, cioè $n \le 5$.

Di fatto esistono cinque vertici che realizzano la condizione: ad esempio, se si numerano i vertici in sequenza da 0 a 20, è accettabile la cinquina {0, 1, 6, 8, 18}. Infatti, chiamiamo *lunghezza della coppia di vertici* $A$, $B$ il numero $n$ di vertici che si incontrano per andare da $A$ a $B$ ($A$ escluso e $B$ compreso) seguendo il percorso più corto: è chiaro che la lunghezza di una coppia cresce al crescere della distanza dei vertici. La tabella delle lunghezze relativa ai vertici scelti

| | **0** | **1** | **6** | **8** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | | | |
| **6** | 6 | 5 | | |
| **8** | 8 | 7 | 2 | |
| **18** | 3 | 4 | 9 | 10 |

mostra che la cinquina è accettabile. È pure accettabile ognuna delle altre 10 cinquine che si ottengono da questa per rotazione di un multiplo di (360/21) gradi o per simmetria rispetto all'asse del poligono di 21 lati passante per uno qualsiasi dei vertici.

La cosa sorprendente è che non ne esistono altre! (La dimostrazione di questo fatto, piuttosto impegnativa, non era richiesta.)

Diamo un'idea di come sia possibile orientare i tentativi per determinare una cinquina ammissibile. I cinque vertici individuano un pentagono (non regolare) la somma delle lunghezze dei cui vertici consecutivi è 21. Cerchiamo allora le partizioni di 21 in somme di numeri ≤ 10; ce ne sono 9:

1+2+3+5+10
1+2+3+6+9, 1+2+4+5+9
1+2+3+7+8, 1+2+4+6+8, 1+3+4+5+8
1+2+5+6+7, 1+3+4+6+7, 2+3+4+5+7

Appoggiandosi alla figura di un pentagono con relative diagonali, si è poi scritta la somma in modo che due addendi consecutivi non avessero per somma l'addendo successivo (questo significherebbe che la corrispondente lunghezza coinvolge vertici non consecutivi del pentagono): 1+5+2+10+3.

Infine si sono fatte le somme parziali: 0, 1, 1+5, 1+5+2, 1+5+2+10.

Ci è andata bene, perché altre possibili scelte non realizzano la condizione, anche scegliendo la stessa partizione: ad esempio per 1+5+3+10+2, che produce i vertici {0, 1, 6, 9, 19}, si ha la seguente tabella

| | **0** | **1** | **6** | **9** |
|---|---|---|---|---|
| **1** | 1 | | | |
| **6** | 6 | 5 | | |
| **9** | 9 | 8 | 3 | |
| **19** | 2 | 3 | 8 | 10 |

**S5.** (*18 punti*) In alcuni vertici di un poligono regolare di 1000 lati vi sono alcune monete (ogni vertice può ospitarne nessuna, una o più di una). Una mossa consiste nelle operazioni seguenti: scegliere due monete e spostarne una nel vertice adiacente in senso orario e l'altra nel vertice adiacente in senso anti-orario. Partendo dalla situazione per la quale in ogni vertice vi è esattamente una moneta, è possibile arrivare con un numero finito di mosse ad avere

a) 8 mucchietti di 125 monete ciascuno?
b) 125 mucchietti di 8 monete ciascuno?

Giustifica entrambe le risposte.

**Soluzione:** a) si, b) no.

a) Posso ottenere la disposizione voluta in molti modi. Per esempio è chiaro che con un numero finito di mosse posso arrivare ad avere in due vertici opposti due mucchietti di 500 monete ciascuno. Ora, agendo su una moneta per ciascuno dei due mucchietti, con 250 mosse posso lasciare in ognuno di questi due vertici esattamente la metà delle monete, spostando le rimanenti in due opportuni vertici adiacenti; dimezzando allo stesso modo i 4 mucchietti ottenuti, raggiungo lo scopo.
b) Numeriamo i vertici da 1 a 1000, ad esempio in senso orario, e in ogni istante attribuiamo ad ogni moneta il numero del vertice nel quale si trova; chiamiamo $S_k$ la somma di tutti i numeri attribuiti calcolata negli istanti tra la $k$-esima e la ($k$+1)-esima mossa. Si ha

$$S_0 = 1 + 2 + \dots + 1000 = 1001 \times 500.$$

Supponiamo di avere fatto la ($k$+1)-esima mossa spostando le monete lungo i lati del poligono, percorrendo un solo lato:

- se nessuna o entrambe le monete spostate hanno attraversato un raggio che separa il vertice 1000 dal vertice 1, si ha $S_{k+1} = S_k$;
- se una e una sola delle due monete ha attraversato il raggio di cui sopra, $S_{k+1}$ differisce da $S_k$ per $\pm 1000$.

Ammettiamo ora che esista $k$ tale che la ripartizione *b)* sia realizzata subito dopo avere effettuato la $k$-esima mossa; siano $v_1, \dots, v_{125}$ i numeri assegnati ai 125 vertici nei quali si vengono a trovare i 125 mucchietti di 8 monete ciascuno. Si dovrebbe avere

$$S_k = 8(v_1 + \dots + v_{125}),$$

ma anche

$$S_k = S_0 + n \times 1000 = 1001 \times 500 + n \times 1000$$

con $n$ intero opportuno. Questo è impossibile, poiché il primo dei due numeri è divisibile per 8, mentre il secondo chiaramente non lo è.

**S6.** (*22 punti*) Siano $a$ un numero reale e $e$ un numero reale positivo arbitrari. Dimostrare che esistono due numeri interi non entrambi nulli $H$ e $K$ tali che $|H - Ka| < e$.

**Soluzione**

L'affermazione è banale se $a$ è un numero razionale. Per $a$ reale generico sono possibili diverse dimostrazioni: una delle più semplici è la seguente. Per $n$ generico intero positivo fissato consideriamo gli $n + 1$ numeri $0$, $a - [a]$, $2a - [2a]$, ..., $na - [na]$, dove $[x]$ denota la parte intera di $x$ (cioè il più grande intero non superiore a $x$). Essendo tutti compresi fra 0 e 1, ne devono esistere (almeno) due a distanza minore di $1/n$: siano $n_1a - [n_1a]$ e $n_2a - [n_2a]$.
Posto $K_n = n_1 - n_2$ e $H_n = [n_1a] - [n_2a]$, si ha dunque $|K_na - H_n| < 1/n$. È quindi sufficiente scegliere $n$ in modo che si abbia $1/n < e$.