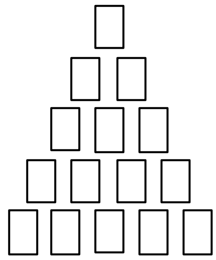
Kangourou della Matematica 2009
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 11 maggio 2009

LIVELLO ÉCOLIER

E1. (*5 punti*) Per preparare 4 litri di sciroppo occorrono esattamente 3 litri d'acqua, 1 litro di succo concentrato e 500 grammi di zucchero. Hai a disposizione 18 litri d'acqua, 5 litri di succo concentrato e 2 chili di zucchero. Quanti litri di sciroppo puoi preparare al massimo?

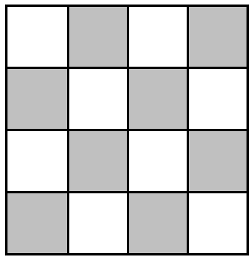
E2. (*7 punti*) In figura sono rappresentate 15 carte.
Se una carta (che non sia la prima in alto) sparisce dal tavolo, devono sparire anche le carte che sono a contatto con essa nella riga superiore. Ho levato due carte in modo che rimanesse il minor numero di carte possibile: qual è questo numero?



E3. (*11 punti*) Devi sistemare 4 monete identiche in altrettante caselle di una scacchiera 4 × 4 rispettando le regole seguenti:

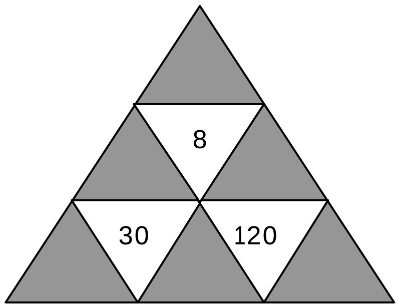
- in nessuna riga e in nessuna colonna può esserci più di una moneta;
- se in una casella c'è una moneta, ogni casella che abbia in comune con essa qualche vertice non può contenere monete.

In quanti modi diversi puoi realizzare il progetto?



E4. (*14 punti*) Una ditta produce cioccolatini tutti dello stesso peso e li vuole vendere in confezioni da 36, 28, 24 o 16 pezzi. Su ogni confezione va apposta un'etichetta che riporta il peso netto del contenuto; sono state già preparate etichette indicanti 630 grammi e altre indicanti 360 grammi. Quali pesi dovranno indicare le etichette ancora da preparare?

E5. (*18 punti*) Poni in ognuno dei triangoli ombreggiati della griglia in figura uno dei sei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 utilizzandoli tutti e facendo in modo che il numero che compare in ciascun triangolo bianco sia il prodotto dei tre numeri che compaiono nei tre triangoli ombreggiati che lo circondano.
Qual è il prodotto dei tre numeri che stanno nei triangoli ombreggiati che, uniti a quelli bianchi, formano un esagono?



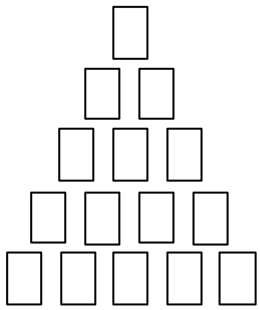
E6. (*22 punti*) Quattro barche *A*, *B*, *C*, *D* possono attraversare un fiume da una sponda all'altra nei due sensi; il tempo impiegato da ogni barca non dipende dal senso. La barca *A* impiega 2 minuti per la traversata, la barca *B* ne impiega 4, la barca *C* ne impiega 8 e la barca *D* ne impiega 16. Le quattro barche si trovano ormeggiate insieme sulla sponda sinistra, devono essere tutte traghettate sulla sponda destra ed è disponibile un solo timoniere. Una barca può trascinarne al più un'altra, ma in questo caso il convoglio delle due barche impiega il tempo di traversata della barca più lenta fra le due. Una volta effettuata una traversata, il timoniere può ritornare al punto di partenza solo utilizzando una delle quattro barche. Trovate il tempo minore (in minuti) che consente di effettuare l'operazione, trascurando il tempo necessario ad agganciare e sganciare le barche e a trasbordare da una all'altra.

LIVELLO ÉCOLIER

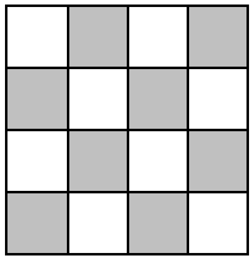
E1. (*5 punti*) Per preparare 4 litri di sciroppo occorrono esattamente 3 litri d'acqua, 1 litro di succo concentrato e 500 grammi di zucchero. Hai a disposizione 18 litri d'acqua, 5 litri di succo concentrato e 2 chili di zucchero. Quanti litri di sciroppo puoi preparare al massimo?

Soluzione: 16.
Se gli altri ingredienti sono in quantità sufficiente, con 18 litri d'acqua si possono ottenere $4 \times 18 : 3 = 24$ litri di sciroppo, con 5 litri di succo si possono ottenere $4 \times 5 : 1 = 20$ litri di sciroppo e con 2 chili = 2.000 grammi di zucchero si possono ottenere $4 \times 2.000 : 500 = 16$ litri di sciroppo. Il più piccolo fra i numeri 24, 20 e 16 è 16.

E2. (*7 punti*) In figura sono rappresentate 15 carte.
Se una carta (che non sia la prima in alto) sparisce dal tavolo, devono sparire anche le carte che sono a contatto con essa nella riga superiore. Ho levato due carte in modo che rimanesse il minor numero di carte possibile: qual è questo numero?



Soluzione: 3.
Visto che spariscono solo le carte al di sopra delle due rimosse, ho certamente levato due carte della riga più in basso. In particolare, se ho scelto la seconda e la quarta, ho potuto eliminare tutte e 4 le carte della riga superiore e quindi le carte delle prime tre righe. Chiaramente non avrei potuto ottenere la sparizione di più carte.



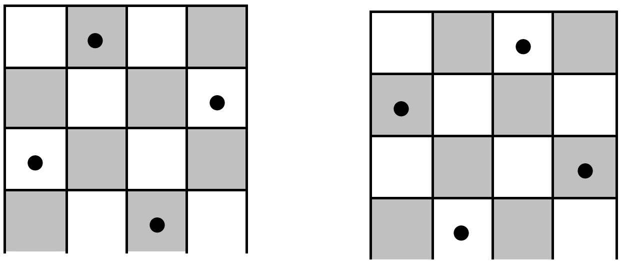
E3. (*11 punti*) Devi sistemare 4 monete identiche in altrettante caselle di una scacchiera 4 × 4 rispettando le regole seguenti:

- in nessuna riga e in nessuna colonna può esserci più di una moneta;
- se in una casella c'è una moneta, ogni casella che abbia in comune con essa qualche vertice non può contenere monete.

In quanti modi diversi puoi realizzare il progetto?

Soluzione: 2

Non è difficile constatare che, in base alle nostre regole, ogni tentativo di piazzare le monete partendo da una qualunque delle 4 caselle centrali o delle 4 caselle d'angolo è destinato ad arenarsi (date le simmetrie, è sufficiente appurare questo fatto per una sola delle caselle centrali e una sola di quelle d'angolo). Rimangono dunque disponibili ad ospitare le monete solo le due caselle centrali della prima e quarta riga e le due caselle centrali della prima e quarta colonna, che consentono complessivamente le due sole disposizioni illustrate.

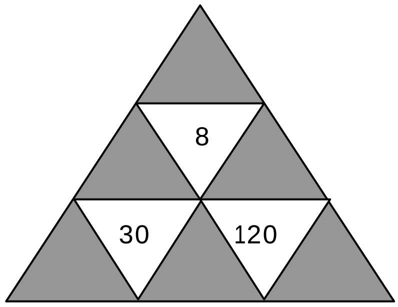


E4. (*14 punti*) Una ditta produce cioccolatini tutti dello stesso peso e li vuole vendere in confezioni da 36, 28, 24 o 16 pezzi. Su ogni confezione va apposta un'etichetta che riporta il peso netto del contenuto; sono state già preparate etichette indicanti 630 grammi e altre indicanti 360 grammi. Quali pesi dovranno indicare le etichette ancora da preparare?

Soluzione: 810, 540.

Le uniche taglie delle confezioni che stanno nel rapporto di 630 a 360, cioè di 7 a 4, sono nell'ordine 28 e 16; quindi 16 cioccolatini pesano 360 grammi e 4 ne pesano 90: ciò basta a risolvere il problema poiché tutte le confezioni contengono un numero di cioccolatini multiplo di 4.

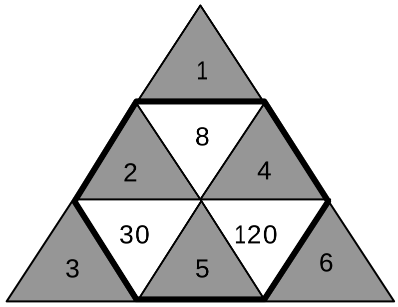
E5. (*18 punti*) Poni in ognuno dei triangoli ombreggiati della griglia in figura uno dei sei numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 utilizzandoli tutti e facendo in modo che il numero che compare in ciascun triangolo bianco sia il prodotto dei tre numeri che compaiono nei tre triangoli ombreggiati che lo circondano.
Qual è il prodotto dei tre numeri che stanno nei triangoli ombreggiati che, uniti a quelli bianchi, formano un esagono?



Soluzione: 40.
Osserviamo che

- $8 = 1 \times 2 \times 4$ e non c'è altro modo per rappresentare tale numero;
- $120 = 4 \times 5 \times 6$ e non c'è altro modo per rappresentare tale numero.

Allora 4 deve stare nel triangolo tra quello denotato con 8 e quello denotato con 120.
Inoltre $30 = 2 \times 3 \times 5$ (oppure $30 = 1 \times 5 \times 6$, ma questa ultima scomposizione porterebbe ad avere i due triangoli grigi contenenti 5 e 6 entrambi adiacenti tanto a quello denotato con 30 quanto a quello denotato con 120, cosa palesemente impossibile). Quindi i triangoli devono essere riempiti come in figura e il prodotto richiesto vale 40.



E6. (*22 punti*) Quattro barche *A*, *B*, *C*, *D* possono attraversare un fiume da una sponda all'altra nei due sensi; il tempo impiegato da ogni barca non dipende dal senso. La barca *A* impiega 2 minuti per la traversata, la barca *B* ne impiega 4, la barca *C* ne impiega 8 e la barca *D* ne impiega 16. Le quattro barche si trovano ormeggiate insieme sulla sponda sinistra, devono essere tutte traghettate sulla sponda destra ed è disponibile un solo timoniere. Una barca può trascinarne al più un'altra, ma in questo caso il convoglio delle due barche impiega il tempo di traversata della barca più lenta fra le due. Una volta effettuata una traversata, il timoniere può ritornare al punto di partenza solo utilizzando una delle quattro barche. Trovate il tempo minore (in minuti) che consente di effettuare l'operazione, trascurando il tempo necessario ad agganciare e sganciare le barche e a trasbordare da una all'altra.

Soluzione: 30 minuti.
Volendo minimizzare il tempo, è chiaro che conviene che le due barche più lente viaggino insieme e nessuna delle due venga utilizzata per i rientri del timoniere. Si può quindi operare come segue.

- Primo viaggio: andata $A + B$, ritorno *A*; tempo impiegato: 4 + 2 minuti.
- Secondo viaggio: andata $C + D$, ritorno *B*; tempo impiegato: 16 + 4 minuti.
- Terzo viaggio: andata $A + B$; tempo impiegato: 4 minuti.

Una volta appurato il fatto che conviene abbinare *C* con *D*, è facile vedere che non esiste soluzione migliore di quella proposta.