Kangourou della Matematica 2009
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 11 maggio 2009

LIVELLO CADET

C1. (*5 punti*) Un parallelogramma è suddiviso dalle sue diagonali in 4 triangoli, di uno dei quali conosci l'area. Ti è sufficiente questo dato per determinare l'area del parallelogramma? Giustifica la tua risposta.

C2. (*7 punti*) Ad una festicciola vi sono quattro pizze di forma circolare: una ha raggio 8 cm ed è tagliata in 3 fette uguali fra loro, una seconda ha raggio 10 cm ed è tagliata in 4 fette uguali fra loro, una terza ha raggio 12 cm ed è tagliata in 6 fette uguali fra loro, la quarta ha raggio 14 cm ed è tagliata in 8 fette uguali fra loro. Ti spetta una sola fetta e vuoi mangiare quanta più pizza possibile: da quale delle pizze ti conviene scegliere la fetta?

C3. (*11 punti*) Il numero $29^{28} + 4$ è primo? Giustifica la risposta.

C4. (*14 punti*) Considera una pila ordinata di 5.998 fogli numerati a partire da 1 (cioè il primo foglio in alto riporta il numero 1). Ora costruisci una nuova pila nel modo seguente: prendi il primo foglio, poni il secondo sopra il primo e il terzo sotto il primo; procedi quindi iterando il procedimento: il quarto foglio andrà sopra il secondo e il quinto sotto il terzo e così via. Una volta completata l'operazione, vi saranno dei fogli che, nella nuova pila, si troveranno nella stessa posizione in cui si trovavano nella vecchia? In caso affermativo, quali?

C5. (*18 punti*) Una formica è libera di muoversi sulla superficie di un parallelepipedo rettangolo di dimensioni $1 \times 1 \times 2$ metri, ma non di entrarvi all'interno. Partendo da un vertice**,** vuole raggiungere il vertice antipodale (cioè quello da esso più lontano) muovendosi lungo il cammino più breve possibile: quanta strada deve percorrere?
Il vertice opposto è il punto del parallelepipedo più lontano dal vertice di partenza (sempre se si è vincolati a muoversi sulla superficie)?

C6. (*22 punti*) Considera un poligono regolare di 21 lati. Vuoi colorarne di rosso alcuni vertici in modo che, comunque scelte due coppie di vertici entrambi colorati di rosso, la distanza fra i vertici di una coppia sia diversa da quella fra i vertici dell'altra. Quanti vertici puoi colorare al massimo?

Kangourou della Matematica 2009
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 11 maggio 2009

LIVELLO CADET

C1. (*5 punti*) Un parallelogramma è suddiviso dalle sue diagonali in 4 triangoli, di uno dei quali conosci l'area. Ti è sufficiente questo dato per determinare l'area del parallelogramma? Giustifica la tua risposta.

Soluzione: si.
Ricordiamo che il punto di intersezione delle diagonali d, d' di un parallelogramma è punto medio per entrambe. Ora, il parallelogramma è diviso dalla diagonale d in due triangoli congruenti T e U; T è diviso dall'altra diagonale d' in due triangoli aventi uguale base (pari a metà della diagonale d) e altezza (quella del triangolo T): quindi questi triangoli hanno uguale area. La stessa cosa succede nel triangolo U: quindi i quattro triangoli nei quali il parallelogramma viene ripartito dalle sue diagonali hanno tutti la stessa area.

C2. (*7 punti*) Ad una festicciola vi sono quattro pizze di forma circolare: una ha raggio 8 cm ed è tagliata in 3 fette uguali fra loro, una seconda ha raggio 10 cm ed è tagliata in 4 fette uguali fra loro, una terza ha raggio 12 cm ed è tagliata in 6 fette uguali fra loro, la quarta ha raggio 14 cm ed è tagliata in 8 fette uguali fra loro. Ti spetta una sola fetta e vuoi mangiare quanta più pizza possibile: da quale delle pizze ti conviene scegliere la fetta?

Soluzione: da quella di raggio 10.
Al variare del raggio, l'area del cerchio è proporzionale al quadrato del raggio (essendo p il fattore di proporzionalità). Si tratta allora di stabilire quale è il maggiore fra i seguenti quattro numeri: $8^2/3$, $10^2/4$, $12^2/6$, $14^2/8$. Facili confronti portano a scegliere $10^2/4 = 25$ (i rimanenti numeri infatti valgono meno di 22 il primo, 24 il terzo, 24,5 il quarto).

C3. (*11 punti*) Il numero $29^{28} + 4$ è primo? Giustifica la risposta.

Soluzione: no.
È molto facile vedere che ogni potenza pari di un numero la cui ultima cifra sia 9 ha come ultima cifra 1: se dunque a una qualsiasi potenza pari di un tale numero si aggiunge 4, si ottiene un numero la cui ultima cifra è 5, quindi non primo in quanto divisibile per 5 e maggiore di 5.
In alternativa si può scrivere

$$29^{28} + 4 = 29^{28} + 2^2 \times 29^{14} + 2^2 - 2^2 \times 29^{14} = (29^{14} + 2)^2 - (2 \times 29^7)^2,$$

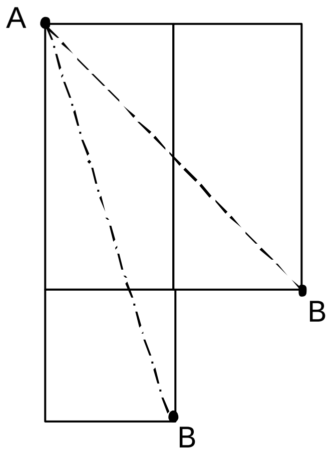
intero comodamente fattorizzabile, in quanto differenza di due quadrati perfetti, in fattori entrambi chiaramente diversi da 1.

C4. (*14 punti*) Considera una pila ordinata di 5.998 fogli numerati a partire da 1 (cioè il primo foglio in alto riporta il numero 1). Ora costruisci una nuova pila nel modo seguente: prendi il primo foglio, poni il secondo sopra il primo e il terzo sotto il primo; procedi quindi iterando il procedimento: il quarto foglio andrà sopra il secondo e il quinto sotto il terzo e così via. Una volta completata l'operazione, vi saranno dei fogli che, nella nuova pila, si troveranno nella stessa posizione in cui si trovavano nella vecchia? In caso affermativo, quali?

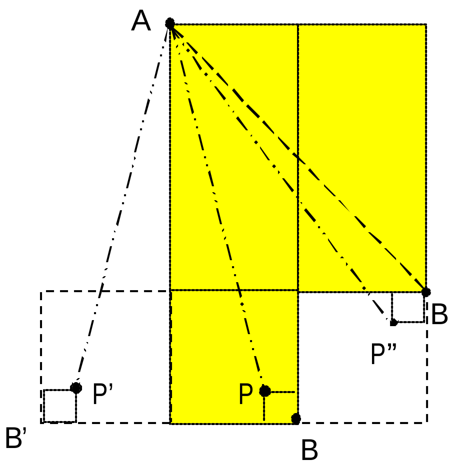
Soluzione: solo il foglio con il numero 2.000.
Nessun foglio (contrassegnato da un numero) dispari potrà rimanere nella stessa posizione: infatti, una volta completata l'operazione, si troverà preceduto, oltre che da tutti i fogli dispari che lo precedevano inizialmente, anche da tutti i fogli pari della pila (la sequenza termina con un foglio pari, dunque vi era almeno un foglio pari che inizialmente lo seguiva).
Sia allora k intero pari, $k = 5.998$. Una volta completata l'operazione, il foglio k si vedrà preceduto da tutti e soli i $5.998/2 - k/2$ fogli pari che lo seguivano nella disposizione iniziale: la sua nuova posizione sarà dunque $5.998/2 - k/2 + 1$. Uguagliando a k si ottiene $k = 2.000$.

C5. (*18 punti*) Una formica è libera di muoversi sulla superficie di un parallelepipedo rettangolo di dimensioni $1 \times 1 \times 2$ metri, ma non di entrarvi all'interno. Partendo da un vertice, vuole raggiungere il vertice antipodale (cioè quello da esso più lontano) muovendosi lungo il cammino più breve possibile: quanta strada deve percorrere?
Il vertice opposto è il punto del parallelepipedo più lontano dal vertice di partenza (sempre se si è vincolati a muoversi sulla superficie)?

Soluzione: $\sqrt{8}$, no.



La figura mostra una parte dello sviluppo del parallelepipedo sul piano, precisamente una faccia quadrata e due facce rettangolari adiacenti. Naturalmente è sufficiente considerare una coppia (A, B) di vertici antipodali qualsiasi. È chiaro che il cammino più breve da A a B vincolato alla superficie deve essere uno dei due indicati in figura I: il teorema di Pitagora permette di concludere che è quello che si svolge sulle due facce rettangolari ed è lungo $\sqrt{4+4} = \sqrt{8}$ (l'altro è lungo $\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$).



Il punto B antipodale ad A, tuttavia, non è il punto del parallelepipedo più lontano da A lungo cammini vincolati alla superficie: ad esempio è più lontano da A il punto P sulla faccia quadrata indicato nella seconda figura, che dista 1/4 da ciascuno degli spigoli che confluiscono in B.
Infatti, comunque si consideri congiunta alle facce rettangolari la base quadrata, si trova che il segmento che congiunge A con P è lungo
$\sqrt{9/16+121/16} = \sqrt{49/16+81/16} = \sqrt{130/16} > \sqrt{128/16} = \sqrt{8}$.

C6. (*22 punti*) Considera un poligono regolare di 21 lati. Vuoi colorarne di rosso alcuni vertici in modo che, comunque scelte due coppie di vertici entrambi colorati di rosso, la distanza fra i vertici di una coppia sia diversa da quella fra i vertici dell'altra. Quanti vertici puoi colorare al massimo?

Soluzione: 5.

I segmenti che congiungono due vertici qualunque del poligono assegnato sono esattamente di 10 lunghezze diverse. Detto n il numero dei vertici colorati di rosso, i segmenti che li congiungono a coppie sono $\frac{n(n-1)}{2}$; poiché li vogliamo tutti di lunghezza diversa deve essere $\frac{n(n-1)}{2} \leq 10$, cioè $n \leq 5$.

Di fatto esistono cinque vertici che realizzano la condizione: ad esempio, se si numerano i vertici in sequenza da 0 a 20, è accettabile la cinquina {0, 1, 6, 8, 18}.

Infatti, chiamiamo *lunghezza della coppia di vertici A*, *B* il numero di vertici che si incontrano per andare da *A* a *B* (*A* escluso e *B* compreso) seguendo il percorso più corto: è chiaro che la lunghezza di una coppia cresce al crescere della distanza dei vertici. La tabella delle lunghezze relativa ai vertici scelti

	0	**1**	**6**	**8**
1	1			
6	6	5		
8	8	7	2	
18	3	4	9	10

mostra che la cinquina è accettabile. È pure accettabile ognuna delle altre 10 cinquine che si ottengono da questa per rotazione di un multiplo di (360/21) gradi o per simmetria rispetto all'asse del poligono di 21 lati passante per uno qualsiasi dei vertici.

La cosa sorprendente è che non ne esistono altre! (La dimostrazione di questo fatto, piuttosto impegnativa, non era richiesta.)

Diamo un'idea di come sia possibile orientare i tentativi per determinare una cinquina ammissibile. I cinque vertici individuano un pentagono (non regolare) la somma delle lunghezze dei cui vertici consecutivi è 21. Cerchiamo allora le partizioni di 21 in somme di numeri ≤ 10; ce ne sono 9:

1+2+3+5+10

1+2+3+6+9, 1+2+4+5+9

1+2+3+7+8, 1+2+4+6+8, 1+3+4+5+8

1+2+5+6+7, 1+3+4+6+7, 2+3+4+5+7

Appoggiandosi alla figura di un pentagono con relative diagonali, si è poi scritta la somma in modo che due addendi consecutivi non avessero per somma l'addendo successivo (questo significherebbe che la corrispondente lunghezza coinvolge vertici non consecutivi del pentagono): 1+5+2+10+3.

Infine si sono fatte le somme parziali: 0, 1, 1+5, 1+5+2, 1+5+2+10.

Ci è andata bene, perché altre possibili scelte non realizzano la condizione, anche scegliendo la stessa partizione: ad esempio per 1+5+3+10+2, che produce i vertici {0, 1, 6, 9, 19}, si ha la seguente tabella

	0	**1**	**6**	**9**
1	1			
6	6	5		
9	9	8	3	
19	2	3	8	10