

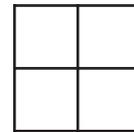


Kangourou Italia
Gara del 28 marzo 2008
Categoria Student
Per studenti di quarta o quinta della
secondaria di secondo grado



I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. Nelle celle di un tabella 2×2 sono scritti (uno per cella) i numeri 3 e 4 e due numeri non noti. Si sa che la somma dei numeri di una riga è 5, la somma dei numeri dell'altra riga è 10 e la somma dei numeri di una colonna è 9. Qual è il più grande dei due numeri incogniti?



- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 3

2. Se $x + y = 0$ e $x \neq y$, allora $\frac{x^{2008}}{y^{2008}} =$

- A) -1 B) 0 C) 1 D) 2^{2008} E) x/y

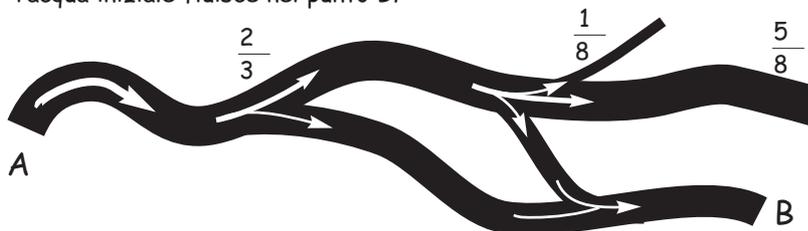
3. In una tabella rettangolare 33×21 le righe sono numerate da 1 a 33 e le colonne sono numerate da 1 a 21. Cancelliamo le righe il cui numero non è un multiplo di 3 e le colonne il cui numero è pari. Quante celle rimangono nella tabella?

- A) 110 B) 121 C) 115,5 D) 119 E) 242

4. Quanti numeri primi p hanno la proprietà che anche $p^4 + 1$ è primo?
 (Ricorda che 1 non è un numero primo.)

- A) Nessuno B) 1 C) 2 D) 3 E) Infiniti

5. Un fiume inizia nel punto A. Nel suo corso si divide in due; il primo ramo riceve $\frac{2}{3}$ dell'acqua e il secondo il resto. Più avanti il primo ramo si divide in tre sottorami, di cui il primo riceve $\frac{1}{8}$ dell'acqua, il secondo $\frac{5}{8}$ e il terzo il resto. Infine quest'ultimo sottoramo incontra il secondo ramo della prima biforcazione del fiume: la mappa qui sotto illustra la situazione. Che parte dell'acqua iniziale fluisce nel punto B?

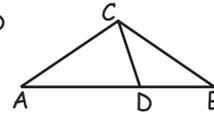


Student



- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{5}{4}$ C) $\frac{2}{9}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

6. È dato un triangolo isoscele ABC ($CA = CB$). Il punto D sul lato AB è tale che $AD = AC$ e $DB = DC$ (vedi figura).



Allora la misura dell'angolo ACB è

- A) 98° B) 100° C) 104°
 D) 108° E) 110°

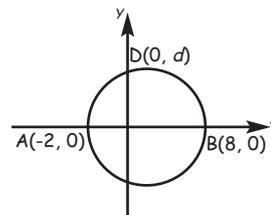
7. Una scatola contiene sette carte numerate da 1 a 7. Due saggi pescano a caso delle carte dalla scatola: il primo ne prende tre, il secondo due delle rimanenti; le ultime due restano chiuse nella scatola. Il primo saggio, dopo aver guardato solo i numeri scritti sulle carte da lui pescate, dice al secondo: "Sono certo che la somma dei numeri riportati sulle tue carte è pari". Quanto vale la somma dei numeri riportati sulle carte pescate dal primo saggio?

- A) 10 B) 12 C) 6 D) 9 E) 15

8. Nel cerchio disegnato in figura, AB è un diametro.

Determina l'ordinata d del punto D .

- A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) 4
 D) 5 E) 6



Student

9. Sappiamo che $x^2yz^3 = 7^3$ e $xy^2 = 7^9$. Allora $xyz =$

- A) 7^4 B) 7^6 C) 7^8 D) 7^9 E) 7^{10}

10. Vuoi sistemare in ogni posto vuoto dell'allineamento 2__8 una cifra in modo da ottenere un numero di quattro cifre divisibile per 3. Quante scelte hai per la coppia (ordinata) di cifre da inserire?

- A) 29 B) 30 C) 19 D) 20 E) 33

I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

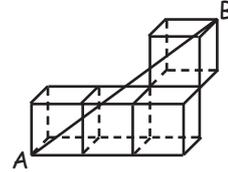
11. Hai i seguenti sette numeri: -9 ; 0 ; -5 ; 5 ; -4 ; -1 ; -3 . Utilizzando sei di essi vuoi formare tre coppie in modo tale che la somma dei numeri di ogni coppia sia sempre la stessa. Che numero devi escludere?

- A) 5 B) 0 C) -3 D) -4 E) -5



12. La lunghezza dello spigolo di ciascuno dei cubi in figura è 1. Qual è la lunghezza del segmento AB?

- A) $\sqrt{17}$ B) 7 C) $\sqrt{13}$
 D) $\sqrt{7}$ E) $\sqrt{14}$



13. Ad una gara matematica vengono proposti cinque problemi. I punteggi attribuiti ad essi sono tutti diversi tra loro e sono tutti interi positivi. Roberto ha risolto tutti i cinque problemi correttamente, ottenendo 10 punti in totale per i due problemi con i punteggi minori e 18 punti in totale per i due problemi con i punteggi maggiori. Quanti punti ha ottenuto Roberto in totale per i cinque problemi?

- A) 30 B) 32 C) 34 D) 35 E) 40

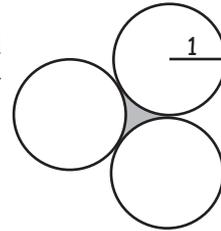
14. Matilde ha disegnato 36 canguri usando tre colori distinti. Il bianco è stato usato per 25 canguri, il rosso per 28 e il nero per 20. Solo per 5 canguri sono stati usati tutti e tre i colori. Quanti dei canguri disegnati sono di un solo colore?

- A) 0 B) 4 C) 12 D) 31
 E) Non è possibile stabilirlo.

Student

15. Osserva la figura. Tre circonferenze di raggio 1 sono a due a due tangenti esternamente. Quanto vale l'area della regione ombreggiata?

- A) $\sqrt{3} - \frac{1}{2}\pi$ B) $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ C) $\frac{1}{8}\pi$
 D) $(\sqrt{3} - \frac{3}{2})\pi$ E) $\frac{1}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$



16. Le lunghezze degli spigoli di un parallelepipedo rettangolo, misurata in centimetri, sono numeri interi e formano una progressione geometrica di ragione $q = 2$. Quale delle seguenti misure, in centimetri cubi, può rappresentare il volume del solido?

- A) 120 B) 188 C) 350 D) 500 E) Nessuna

17. Il numeratore e il denominatore di una frazione sono numeri negativi e il numeratore è maggiore di uno del denominatore. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

- A) La frazione è un numero minore di -1.
 B) La frazione è un numero tra -1 e 0.
 C) La frazione è un numero positivo minore di 1.
 D) La frazione è un numero maggiore di 1.
 E) Non si può stabilire se la frazione sia un numero positivo o negativo.



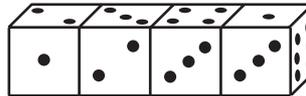
18. Cinque punti distinti A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 , sono disposti nell'ordine su una retta. Viene scelto un punto P sulla stessa retta in modo che la somma delle distanze $PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 + PA_5$ sia minima. Si può affermare che il punto P è

- A) Necessariamente A_1 . B) Necessariamente A_2 .
 C) Necessariamente A_3 . D) Un qualunque punto tra A_2 e A_4 .
 E) Un qualunque punto tra A_1 e A_5 .

19. Si scelgano a caso tre punti dalla griglia a lato. Qual è la probabilità che essi siano collineari?

- A) $\frac{1}{12}$ B) $\frac{1}{11}$ C) $\frac{1}{16}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{3}{12}$

20. Quattro dadi identici sono accostati come in figura. Le facce di ciascun dado sono numerate da 1 a 6, ma i dadi non sono standard, cioè la somma dei punti di due facce opposte non è necessariamente 7. Qual è la somma dei punti delle 6 facce ciascuna delle quali viene a contatto con qualche altra faccia?



- A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

21. Una pedina posta al centro di una griglia quadrata 5×5 viene mossa con passi orizzontali o verticali di ampiezza uno, determinati dal lancio simultaneo di una coppia di dadi, uno rosso e uno blu. Il dado rosso fa muovere la pedina di un passo verso destra se esce un numero pari e verso sinistra se esce un numero dispari, il dado blu fa muovere la pedina di un passo verso l'alto se esce un numero pari e verso il basso se esce un numero dispari. Qual è la probabilità che dopo due lanci la pedina sia tornata al punto di partenza?

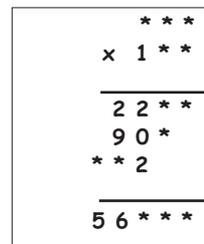
- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{6}$ E) $\frac{1}{9}$

22. Il numero $3^{32} - 1$ ha esattamente due divisori (interi) entrambi maggiori di 75 e minori di 85. Quanto vale il prodotto di questi due divisori?

- A) 5852 B) 6560 C) 6804 D) 6888 E) 6972

23. La figura rappresenta una moltiplicazione eseguita manualmente nel modo usuale. Ogni asterisco sostituisce una cifra. La somma delle cifre del prodotto è

- A) 16 B) 20 C) 26
 D) 30 E) nessuno dei valori indicati.



Student



24. È noto che $x + y + z = 1$ e $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Allora l'espressione $x^2 + y^2 + z^2$

- A) vale 0. B) vale 1. C) vale 2. D) vale 3.
E) ha un valore non determinabile senza ulteriori informazioni.

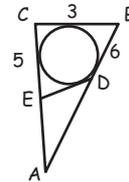
25. Sia $\{a_n\}$ una successione. È noto che $a_1 = 0$ e che,

per $n \geq 0$, si ha $a_{n+1} = a_n + (-1)^n \cdot n$. Se $a_k = 2008$, allora il valore di k è

- A) 2008 B) 2009 C) 4017 D) 4018
E) nessuno dei quattro indicati.

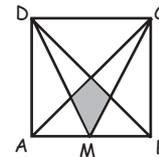
26. Osserva la figura. Nel triangolo ABC è inscritto un cerchio. Si sa che $|AC| = 5$, $|AB| = 6$, $|BC| = 3$ e che il segmento ED è tangente al cerchio. Il perimetro del triangolo ADE vale

- A) 7 B) 4 C) 9
D) 6 E) 8



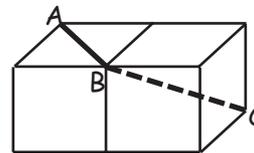
27. Il quadrato ABCD ha il lato di lunghezza 1 e M è il punto medio di AB. L'area della regione ombreggiata vale

- A) 1/14 B) 1/16 C) $\sqrt{2}/18$ D) 1/13
E) un valore diverso dai precedenti.



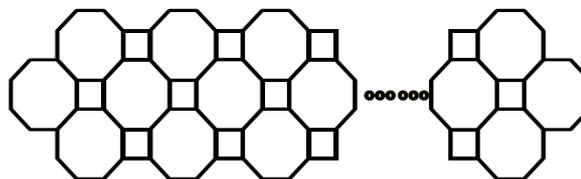
28. I due cubi in figura hanno una faccia in comune. Qual è, in gradi, la misura dell'angolo ABC?

- A) 90 B) 115 C) 120
D) 135 E) 150



29. Per costruire questa decorazione sono state usate (senza piegarle) sbarrette metalliche. Si sa che nella decorazione compaiono 61 ottagoni. Quante sbarrette sono state usate?

- A) 488
B) 400
C) 328
D) 244
E) 446



30. Quanti sono i numeri interi positivi n di 2007 cifre (in rappresentazione decimale) con la seguente proprietà: ogni numero intero di due cifre costituito da due cifre consecutive di n (nello stesso ordine in cui compaiono in n) è divisibile per 17 o per 23?

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 9 E) Più di 9



Categoria Student

Per studenti del quarto e quinto anno della scuola media superiore

I quesiti dal N.1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. Risposta **B)** Per soddisfare le condizioni sulle righe, la coppia di numeri non noti può essere solo (1,7) oppure (2,6); la coppia (1,7) non può soddisfare la condizione data sulle colonne, per cui i numeri non noti sono 2 e 6, e 6 è il maggiore.
2. Risposta **C)** $x = -y \neq 0$; poiché 2008 è pari, $x^{2008} = y^{2008}$.
3. Risposta **B)** Vengono cancellate 22 righe e 10 colonne; restano quindi 11 righe e 11 colonne che determinano 121 celle.
4. Risposta **B)** Se p è dispari, $p^4 + 1$ è pari, quindi è primo solo se $p = 1$. L'unico numero primo che soddisfa la proprietà richiesta è allora 2.
5. Risposta **D)** In B arriva $\frac{1}{3}$ dell'acqua iniziale direttamente dal ramo minore della prima biforcazione a cui si aggiungono i $\frac{2}{8}$ del ramo maggiore della prima biforcazione; in totale $\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
6. Risposta **D)** Detta x la misura di ciascuno degli angoli DBC e DCB, uguali tra loro perché angoli alla base del triangolo isoscele BDC, la misura dell'angolo ADC, supplementare di CDB, è $2x$. Inoltre, sempre perché angoli alla base di un triangolo isoscele, $CAB = DBC = x$ e $ACD = ADC = 2x$ e l'angolo ACB misura $3x$. Sommando i tre angoli del triangolo ABC abbiamo $5x = 180^\circ$, quindi $x = 36^\circ$ e la misura di ACB è 108° .
7. Risposta **B)** Il primo saggio può affermare con certezza che la somma delle due carte in mano al secondo saggio è pari se e solo se le quattro carte, rimaste dopo che lui ne ha prese tre, sono tutte pari o tutte dispari. Poiché le carte pari nel mazzo sono solo tre, devono essere

rimaste le quattro dispari. Il primo saggio ha allora pescato il 2, il 4 e il 6, con somma 12.

8. Risposta **B)** Il raggio del cerchio è 5 e il centro del cerchio ha coordinate (3,0). Per il teorema di Pitagora l'ordinata di D è $d = \sqrt{25 - 9} = 4$.
9. Risposta **A)** Moltiplicando le due equazioni membro a membro, otteniamo $x^3 y^3 z^3 = 7^{12}$; quindi $xyz = 7^4$.
10. Risposta **E)** La somma delle 4 cifre (2, 8 e le due incognite) deve essere divisibile per 3: la somma delle due cifre incognite potrà quindi valere 2, 5, 8, 11, 14 o 17; il numero delle possibili scelte di coppie ordinate di cifre nei vari casi è rispettivamente 3, 6, 9, 8, 5 e 2, la cui somma è 33.

I quesiti dal N.11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. Risposta **E)** Per ottenere coppie con la proprietà richiesta occorre sommare a -9 un numero positivo, quindi abbiniamo 5 a -9 e la somma dei numeri di ogni coppia deve essere -4; concludiamo che -5 non può essere abbinato ad alcun altro numero.
12. Risposta **A)** A e B sono vertici opposti di un parallelepipedo con lati di lunghezza 3, 2 e 2 quindi la lunghezza di AB è $\sqrt{17}$.
13. Risposta **D)** Il quarto (in ordine crescente di difficoltà) problema può valere al massimo $\frac{18}{2} - 1 = 8$ punti mentre il secondo deve valere almeno $\frac{10}{2} + 1 = 6$ punti. Poiché i problemi hanno tutti punteggi diversi, il punteggio del problema intermedio è 7; questo lascia per la coppia con punteggi maggiori l'unica scelta (8,10) e per quella con punteggi minori (6,4). Sommando i punteggi si ottiene 35.

- 14. Risposta B)** 31 canguri sono mono o bicolori e sull'insieme di questi sono stati usati 20 volte il bianco, 23 il rosso e 15 il nero, quindi sono state eseguite 58 colorazioni diverse (in quanto su canguri diversi o di colore diverso). Se ogni canguro fosse bicolore occorrerebbero 62 colorazioni, quindi 4 canguri sono di un unico colore e gli altri 27 bicolori.
- 15. Risposta A)** L'area della regione ombreggiata può essere calcolata sottraendo all'area del triangolo equilatero che ha come vertici i centri dei tre cerchi la somma delle aree dei tre settori circolari che tale triangolo interseca nei tre cerchi, ciascuno con angolo al centro di 60° . Il triangolo ha lato 2, e i cerchi hanno raggio 1 quindi l'area vale $\sqrt{3} - 3 \cdot \frac{\pi}{6}$.
- 16. Risposta E)** Detta n la misura dello spigolo più corto, le misure degli altri spigoli sono $2n$ e $4n$, quindi il volume del parallelepipedo misura $8n^3$; poiché n è intero, la misura del volume deve essere multiplo di 8, e nessuno dei numeri proposti lo è.
- 17. Risposta C)** La frazione è positiva perché quoziente di due numeri negativi; osservando che tra due numeri negativi il maggiore è quello di valore assoluto minore concludiamo che essa è minore di 1.
- 18. Risposta C)** Osserviamo preliminarmente che, dato un segmento AB ed un punto P sulla stessa retta, la somma delle distanze $PA + PB$ è minima (uguale alla lunghezza di AB) quando P appartiene al segmento stesso. Nel problema assegnato sarà allora necessario e sufficiente prendere P interno sia al segmento A_1A_5 che al segmento A_2A_4 per minimizzare la somma $PA_1 + PA_2 + PA_4 + PA_5$; è ora evidente che la scelta migliore di P all'interno di tale segmento è il punto A_3 .

19. Risposta B) Le possibili scelte di 3 punti tra i 12 assegnati sono $\binom{12}{3} = 220$; le scelte di 3 punti allineati sono 4 per ogni riga più le 4 colonne e le 4 diagonali formate da 3 punti: in totale 20. Facendo il rapporto tra i casi favorevoli (3 punti allineati) e tutti i casi possibili otteniamo $\frac{1}{11}$.

20. Risposta B) Dal disegno, che mostra tutte e quattro le facce adiacenti al 3 si deduce che la faccia opposta al 3 è il 5; questo ci dà la quarta faccia adiacente all'1, e concludiamo che la faccia opposta all'1 è il 4; le coppie di facce opposte sono allora (1,4), (2,6) e (3,5). I numeri sulle facce che si toccano sono allora: 2 sul primo dado da destra, le coppie (2,6) e (1,4) sui due dadi successivi, e 3 o 5 sull'ultimo dado a sinistra. Nei due casi la somma sarebbe rispettivamente 18 e 20: sapendo che c'è una risposta giusta, si può già scegliere 20. Osserviamo comunque che il primo dado da destra ci dice che la faccia 3 è sulla faccia libera del quarto dado.

I quesiti dal N.21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

21. Risposta C) Dei 4 movimenti possibili determinati dal secondo lancio, solo 1 fa tornare la pedina al punto di partenza: la probabilità è quindi $\frac{1}{4}$.

22. Risposta B) Scomponendo $3^{32}-1 = (3^{16}+1) (3^8+1) (3^4+1) (3^2+1) (3+1)(3-1)$ è facile vedere che $82 = (3^4+1)$ e $80 = (3^2+1) (3+1)(3-1)$ sono suoi fattori; il loro prodotto vale 6560.

23. Risposta A) Dovendo essere 56 la somma degli addendi in prima e seconda colonna, senza riporto dalla terza, le due cifre mancanti nella terza riga dei prodotti parziali sono, nell'ordine, 4 e 5: il primo fattore del prodotto quindi è 452; i prodotti parziali di prima e seconda riga,

multiplici di 452, sono rispettivamente 2260 e 904 e il risultato della moltiplicazione è 56500, con somma delle cifre 16.

24. Risposta B) Dalla seconda equazione, con la somma di frazioni scritta con denominatore comune, si ottiene $xy + yz + xz = 0$. Poiché $1 = x + y + z$ abbiamo $1 = (x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz) = x^2 + y^2 + z^2$.

25. Risposta C) Per $k \geq 1$, si ha $a_{2k+1} - a_{2k-1} = (-1)^{2k} 2k + (-1)^{2k-1} (2k-1) = 1$ da cui $a_{2k+1} = a_1 + k = k$, e $a_{2k+2} - a_{2k} = (-1)^{2k+1} (2k+1) + (-1)^{2k} 2k = -1$ da cui $a_{2k+2} = a_2 - k = -(k+1)$. 2008 è allora l' elemento di indice $2 \cdot 2008 + 1 = 4017$.

26. Risposta E) Consideriamo i punti T_{AB} , T_{BC} e T_{AC} in cui il cerchio è tangente ai lati rispettivamente AB , BC e CD e osserviamo che $|ED| = |DT_{AB}| + |ET_{AC}|$, quindi il perimetro del triangolo ADE è uguale a $|AT_{AB}| + |AT_{AC}|$. Da $|T_{AB}B| + |T_{AC}C| = |BT_{BC}| + |T_{BC}C| = |BC|$ concludiamo che ADE ha perimetro $6+5-3=8$.

27. Risposta E) Il romboide ombreggiato in figura ha, per simmetria, le diagonali ortogonali tra loro. Detto O il centro del quadrato, la diagonale OM ha lunghezza $\frac{1}{2}$. Per calcolare la lunghezza dell' altra diagonale, osserviamo che i segmenti OB e CM generano, nel trapezio $OMBC$, due triangoli simili, con basi BC e OM che sono una il doppio dell' altra. Allora l'altezza relativa alla base OM nel triangolo minore, che è metà della diagonale orizzontale, è $\frac{1}{2}$ della corrispondente altezza nel triangolo maggiore, dunque $\frac{1}{3}$ dell'altezza del trapezio: ha quindi lunghezza $\frac{1}{6}$. L'area cercata è allora $\frac{1}{12}$.

- 28. Risposta A)** Detta a la lunghezza dello spigolo di un cubo, il triangolo ABC ha i lati AB, BC e AC lunghi rispettivamente $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$ e $a\sqrt{5}$. La relazione pitagorica caratterizza i triangoli rettangoli, dunque AC è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo, con angolo retto ABC.
- 29. Risposta E)** Gli ottagoni sono disposti su tre file, contenenti rispettivamente 20, 21 e 20 ottagoni e sono collegati tra di loro dai loro stessi lati, da 19 sbarrette orizzontali che collegano in alto gli ottagoni della fila alta e 19 che collegano in basso gli ottagoni della fila bassa. Occorre tener conto del fatto che ci sono sbarrette che fungono da lato per due diversi ottagoni; possiamo contarle notando che ogni ottagono della fila alta e ogni ottagono della fila bassa ha due lati in comune con un ottagono della fila centrale, quindi 80 lati sono comuni a due ottagoni. Il numero di sbarrette in figura sarà allora $8 \times 61 + 2 \times 19 - 80 = 446$.
- 30. Risposta D)** Le coppie di cifre consecutive che compaiono nel numero possono essere solo 17, 34, 51, 68, 85, 23, 46, 69 e 92, e la seconda cifra di ognuna deve essere la prima della coppia successiva di cifre del numero. Osserviamo che dopo la coppia 46 possiamo mettere 8 o 9, mentre tutte le altre scelte sono vincolate. La scelta di 8 porta a sequenze che terminano in 1,2,3 o 4 passi, con parte finale 8, 85, 851 o 8517, e le coppie 68, 85, 51 e 17 possono comparire solo in queste sequenze. Le altre coppie possono invece collegarsi in una sequenza ciclica dove si ripete la cinquina 23469. I numeri con la proprietà richiesta sono allora i 5, distinti, formati dalle ripetizioni della cinquina a partire da una sua qualunque cifra (terminando alla cifra opportuna), più i 4 ottenuti aggiungendo all'ultimo 6 della sequenza ciclica le code 8, 85, 851, 8517 (partendo dalla cifra opportuna della cinquina).