Kangourou della Matematica 2008
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 12 maggio 2008

LIVELLO STUDENT

S1. (*5 punti*) È dato un insieme di n oggetti ($n \geq 1$). Quanti sono i suoi sottoinsiemi formati da un numero dispari di elementi?

S2. (*7 punti*) Chiama IMPERFETTO un insieme A di numeri interi positivi tale che

- sia composto da infiniti numeri
- comunque tu scelga un sottoinsieme finito B di tale insieme la somma dei numeri di B non sia mai il quadrato di un numero intero.

Esistono insiemi IMPERFETTI? Giustifica la risposta.

S3. (*11 punti*) Possiamo trovare, per ogni $n > 1$, n interi naturali non nulli per i quali la somma risulti uguale al prodotto?

S4. (*14 punti*) In un piano sono assegnati alcuni punti non collineari (cioè non giacenti tutti su una stessa retta), in numero finito maggiore o uguale a tre. È vero che fra di essi ne esistono necessariamente tre tali che il cerchio delimitato dalla circonferenza passante per questi tre non contenga al suo interno alcuno dei punti rimanenti?

S5. (*18 punti*) Nel piano sono assegnati alcuni poligoni, non necessariamente convessi, in numero finito. Essi sono disposti in modo tale che due qualsiasi fra loro abbiano almeno un punto in comune. Dimostrare che esiste una retta che li interseca tutti.
L'affermazione rimane vera se, invece di poligoni, si considerano insiemi generici di punti?

S6. (*22 punti*) In un certo paese la ricchezza è distribuita in modo molto poco omogeneo: infatti preso un qualsiasi gruppo formato da almeno 10 persone, come minimo il 90% della loro ricchezza totale è concentrato in non più del 10% delle persone.
Si dimostri che in tale paese deve esistere una persona che detiene almeno l'85% della ricchezza totale del paese.

LIVELLO STUDENT

S1. (*5 punti*) È dato un insieme di n oggetti ($n \geq 1$). Quanti sono i suoi sottoinsiemi formati da un numero dispari di elementi?

Soluzione: 2^{n-1}.
Se n è dispari il complementare di ogni sottoinsieme contenente un numero dispari di elementi ne contiene un numero pari. Dunque le famiglie contengono lo stesso numero di sottoinsiemi, pari a 2^{n-1}, visto che i sottoinsiemi di un insieme di n elementi sono in numero di 2^n.
Se n è pari, nell'insieme A degli n elementi consideriamo un sottoinsieme B formato da n-1 elementi: detto x l'elemento di A che non sta in B, la famiglia dei sottoinsiemi di A che non contengono x è in corrispondenza biunivoca con quella dei sottoinsiemi di B e per questi si è già dimostrato che le due famiglie "pari" e "dispari" sono equipotenti (infatti B contiene un numero dispari di elementi); d'altra parte i restanti sottoinsiemi di A si ottengono da quelli di B aggiungendo x: così quelli che contenevano un numero pari di elementi si trasformano in sottoinsiemi che ne contengono un numero dispari e viceversa e quindi si hanno ancora famiglie di sottoinsiemi equipotenti. Quindi anche in questo caso il numero di sottoinsiemi di A formati da un numero dispari di elementi è la metà del numero di sottoinsiemi di A.

S2. (*7 punti*) Chiama IMPERFETTO un insieme A di numeri interi positivi tale che

- sia composto da infiniti numeri
- comunque tu scelga un sottoinsieme finito B di tale insieme la somma dei numeri di B non sia mai il quadrato di un numero intero.

Esistono insiemi IMPERFETTI? Giustifica la risposta.

Soluzione: sì.
Si consideri ad esempio A = $\{2^{2k+1}$, k intero positivo$\}$ (o un suo sottoinsieme infinito) e sia B un sottoinsieme finito di A. Detto m il minimo ed M il massimo dei valori di k tali che 2^{2k+1} appartenga a B, la somma di tutti i numeri dell'insieme B è esprimibile nella forma
$2^{2m+1}(1+ 2^2+\ldots+ 2^{2(M-m)})$. Quest'ultimo numero N non può essere un quadrato perfetto: infatti la somma tra parentesi è un numero dispari, per cui il fattore 2 compare in N un numero dispari di volte. È facile persuadersi del fatto che, nella nostra costruzione di A, 2 può essere sostituito da qualunque altro numero intero.

S3. (*11 punti*) Possiamo trovare, per ogni n > 1, n interi naturali non nulli per i quali la somma risulti uguale al prodotto?

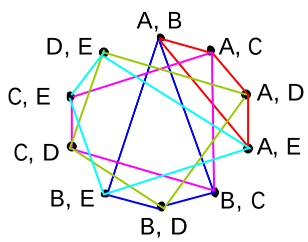
Soluzione: sì.
Non viene chiesto che i numeri siano distinti o diversi da 1: quindi si possono cercare due numeri h, k tenendo i restanti n-2 numeri tutti uguali a 1. Questo conduce all'equazione in interi $hk = h+k+n-2$ cioè $(h-1)(k-1)+1 = n$. Per trovare una soluzione, basta scegliere $h = 2$ e $k = n$.

S4. (*14 punti*) In un piano sono assegnati alcuni punti non collineari (cioè non giacenti tutti su una stessa retta), in numero finito maggiore o uguale a tre. È vero che fra di essi ne esistono necessariamente tre tali che il cerchio delimitato dalla circonferenza passante per questi tre non contenga al suo interno alcuno dei punti rimanenti?

Soluzione: sì.
Fra i punti assegnati se ne scelgano due diversi, A e B, in modo che la distanza fra di essi sia la minima possibile (i punti sono in numero finito, dunque lo sono anche le coppie di punti diversi e quindi esiste la distanza minima fra due punti diversi). Sia C un punto diverso da A e da B che massimizzi la misura dell'angolo ACB (un tale punto C esiste perché i punti sono in numero finito). Il cerchio che ha sul suo bordo i tre punti A, B, C non può contenere al suo interno alcun altro punto fra quelli assegnati (pur potendone contenere sul bordo). Sia infatti D un qualunque punto interno a questo cerchio (diverso dal centro) e sia D' l'altro punto (sul bordo del cerchio) della congiungente A con D: l'angolo AD'B misura quanto l'angolo ACB, per cui l'angolo ADB ha una misura superiore a quella dell'angolo ACB.

S5. (*18 punti*) Nel piano sono assegnati alcuni poligoni, non necessariamente convessi, in numero finito. Essi sono disposti in modo tale che due qualsiasi fra loro abbiano almeno un punto in comune. Dimostrare che esiste una retta che li interseca tutti.
L'affermazione rimane vera se, invece di poligoni, si considerano insiemi generici di punti?

Soluzione
Si scelga una qualsiasi retta nel piano: la proiezione ortogonale su di essa di ognuno dei poligoni è un segmento chiuso (non banale). Si consideri l'insieme di tutti i segmenti ottenuti in questo modo: essi devono avere intersezione non vuota, poiché i segmenti hanno a due a due intersezione non vuota (ad esempio, il più a destra degli estremi sinistri dei vari segmenti è un punto comune a tutti). Si consideri un punto in tale intersezione: la retta del piano passante per quel punto e ortogonale a quella scelta deve intersecare tutti i poligoni.
Per insiemi generici l'affermazione è falsa: si considerino ad esempio i cinque insiemi costruiti come segue. Si associ ad ogni vertice di un decagono regolare una delle 10 coppie che si possono formare con le 5 lettere A, B, C, D, E (coppie diverse etichettano vertici diversi). Ad ogni lettera si associ ora l'insieme dei 4 vertici etichettati dalle coppie che contengono tale lettera (in figura tali vertici sono collegati da segmenti di ugual colore, che non sono contenuti nell'insieme): ogni quaterna ha in comune con ciascuna delle altre un punto, ma, per intersecare ognuna delle quaterne, una retta dovrebbe passare per almeno tre dei vertici, il che non può accadere.



S6. (*22 punti*) In un certo paese la ricchezza è distribuita in modo molto poco omogeneo: infatti preso un qualsiasi gruppo formato da almeno 10 persone, come minimo il 90% della loro ricchezza totale è concentrato in non più del 10% delle persone.
Si dimostri che in tale paese deve esistere una persona che detiene almeno l'85% della ricchezza totale del paese.

Soluzione
Sia n il numero degli abitanti del paese. Per $1 = i = n$ sia R_i la quantità di ricchezza (rappresentata in euro, per esempio) della i-esima persona, dove le persone sono numerate in modo che la sequenza $\{R_i\}$ si presenti in ordine non crescente. Consideriamo le 10 persone più ricche: si deve avere $R_1 = 90/100(R_1 +. . . +R_{10})$ e quindi $R_1 = 9R_2$.
Analogamente, considerando una qualsiasi sequenza di 10 "ricchezze consecutive", si ottiene che per ogni $k < n$ deve essere

$$R_k = 9R_{k+1} = 9^2R_{k+2}. . .$$

Detta R la ricchezza totale, queste informazioni ci forniscono

$$R = R_1 + R_2 +. . . + R_n \le R_1(1+ 9^{-1}+ 9^{-2}+...) = R_1(1+ 8^{-1})$$

e cioè (utilizzando la nota formula per calcolare la somma di una progressione geometrica)

$$R_1 = 8R/9 = 0.88R.$$