Kangourou della Matematica 2008
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 12 maggio 2008

LIVELLO JUNIOR

J1. (*5 punti*) Considera la seguente somma di 2008 addendi

$$9 + 99 + 999 + \ldots + 999\ldots999$$

di cui il primo è costituito dalla sola cifra 9, il secondo dalla cifra 9 scritta due volte, il terzo dalla cifra nove scritta tre volte e così via fino al 2008-esimo e ultimo addendo, che è costituito dalla cifra 9 scritta 2008 volte. Quante cifre ha il numero che ne costituisce il risultato?

J2. (*7 punti*) È dato un insieme di n oggetti ($n \geq 1$). Quanti sono i suoi sottoinsiemi formati da un numero dispari di elementi?

J3. (*11 punti*) Chiama IMPERFETTO un insieme A di numeri interi positivi tale che

- sia composto da infiniti numeri
- comunque tu scelga un sottoinsieme finito B di tale insieme la somma dei numeri di B non sia mai il quadrato di un numero intero.

Trova almeno un insieme IMPERFETTO.

J4. (*14 punti*) Si vogliono tracciare in un piano delle rette in modo tale che tra di loro si vengano sicuramente a formare angoli di ciascuna delle seguenti misure: 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°. Qual è il più piccolo numero di rette che realizza questa richiesta?

J5. (*18 punti*) In un piano sono assegnati alcuni punti non collineari (cioè non giacenti tutti su una stessa retta), in numero finito maggiore o uguale a tre. È vero che fra di essi ne esistono necessariamente tre tali che il cerchio delimitato dalla circonferenza passante per questi tre non contenga al suo interno alcuno dei punti rimanenti?

J6. (*22 punti*) Nel piano sono assegnati alcuni poligoni, non necessariamente convessi, in numero finito. Essi sono disposti in modo tale che due qualsiasi fra loro abbiano almeno un punto in comune. Dimostrare che esiste una retta che li interseca tutti.
L'affermazione rimane vera se, invece di poligoni, si considerano insiemi generici di punti?

Kangourou della Matematica 2008
finale nazionale italiana
Mirabilandia, 12 maggio 2008

LIVELLO JUNIOR

J1. (*5 punti*) Considera la seguente somma di 2008 addendi

$$9 + 99 + 999 + \ldots + 999\ldots999$$

di cui il primo è costituito dalla sola cifra 9, il secondo dalla cifra 9 scritta due volte, il terzo dalla cifra nove scritta tre volte e così via fino al 2008-esimo e ultimo addendo, che è costituito dalla cifra 9 scritta 2008 volte. Quante cifre ha il numero che ne costituisce il risultato?

Soluzione: 2009.
Basta scrivere ogni allineamento 999…999, dove 9 compare k volte, come $10^k - 1$. Allora la somma assegnata diventa
$(10^1 - 1) + (10^2 - 1) + \ldots + (10^{2008} - 1) = (10^0 - 1) + (10^1 - 1) + \ldots + (10^{2008} - 1) = [(10^{2009} - 1)/9] - 2010$
e quindi è compresa strettamente tra 10^{2008} e 10^{2009}. Ogni numero intero in questo intervallo ha 2009 cifre decimali.

J2. (*7 punti*) È dato un insieme di n oggetti ($n \geq 1$). Quanti sono i suoi sottoinsiemi formati da un numero dispari di elementi?

Soluzione: 2^{n-1}.
Se n è dispari il complementare di ogni sottoinsieme contenente un numero dispari di elementi ne contiene un numero pari. Dunque le famiglie contengono lo stesso numero di sottoinsiemi, pari a 2^{n-1}, visto che i sottoinsiemi di un insieme di n elementi sono in numero di 2^n.
Se n è pari, nell'insieme A degli n elementi consideriamo un sottoinsieme B formato da n-1 elementi: detto x l'elemento di A che non sta in B, la famiglia dei sottoinsiemi di A che non contengono x è in corrispondenza biunivoca con quella dei sottoinsiemi di B e per questi si è già dimostrato che le due famiglie "pari" e "dispari" sono equipotenti (infatti B contiene un numero dispari di elementi); d'altra parte i restanti sottoinsiemi di A si ottengono da quelli di B aggiungendo x: così quelli che contenevano un numero pari di elementi si trasformano in sottoinsiemi che ne contengono un numero dispari e viceversa e quindi si hanno ancora famiglie di sottoinsiemi equipotenti. Quindi anche in questo caso il numero di sottoinsiemi di A formati da un numero dispari di elementi è la metà del numero di sottoinsiemi di A.

J3. (*11 punti*) Chiama IMPERFETTO un insieme A di numeri interi positivi tale che

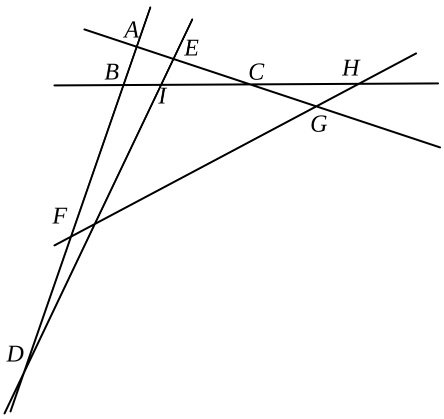
- sia composto da infiniti numeri
- comunque tu scelga un sottoinsieme finito B di tale insieme la somma dei numeri di B non sia mai il quadrato di un numero intero.

Trova almeno un insieme IMPERFETTO.

Soluzione: ad esempio A = $\{2^{2k+1}$, k intero positivo$\}$ (o un suo sottoinsieme infinito).
Infatti sia B un sottoinsieme finito di A. Detto m il minimo dei valori di k tali che 2^{2k+1} appartenga a B, la somma N di tutti i numeri dell'insieme B si può esprimere nella forma $2^{2m+1}(1+H)$, dove H è somma di potenze di 2, tutte con esponente intero pari. Ne segue che N non può essere un quadrato perfetto: infatti la somma tra parentesi è un numero dispari, per cui il fattore 2 compare in N un numero dispari di volte. È facile persuadersi del fatto che, nella nostra costruzione di A, 2 può essere sostituito da qualunque altro numero primo.

J4. (*14 punti*) Si vogliono tracciare in un piano delle rette in modo tale che tra di loro si vengano sicuramente a formare angoli di ciascuna delle seguenti misure: 10°, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°, 80°, 90°. Qual è il più piccolo numero di rette che realizza questa richiesta?

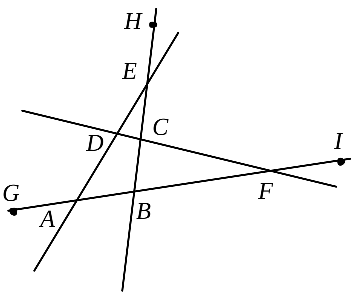
Soluzione: 5 rette.
Innanzi tutto mostriamo che con 5 rette si può realizzare la richiesta: consideriamo due rette



perpendicolari (nel disegno AD e AG): $\angle DAG = 90°$. Poi aggiungiamo:

- una terza retta BH che tagli le precedenti formando angoli $\angle ABC$ di 70° e $\angle BCA$ di 20°
- una quarta retta DE che tagli le prime due formando angoli $\angle ADE$ di 10° e $\angle DEA$ di 80°
- una quinta retta FH che tagli le prime due formando angoli $\angle AFG$ di 40° e $\angle FGA$ di 50°.

Ora osserviamo che
$\angle IBD = 110°$ e quindi $\angle BID = (180 - 10 - 110)° = 60°$
$\angle HCG = 20°$, $\angle HGC = 130°$ e quindi $\angle CHG = 30°$.
Quindi nella figura ci sono tutti gli angoli richiesti



Se invece si prendono solo 4 rette si possono individuare al massimo solo 12 angoli a due a due distinti, che formano 6 coppie di angoli supplementari (in figura, ad esempio $\angle DAB$ e $\angle GAD$, $\angle ABC$ e $\angle CBF$, $\angle BCD$ e $\angle FCB$, $\angle CDA$ e $\angle EDC$, $\angle CED$ e $\angle DEH$, $\angle BFC$ e $\angle IFC$): quindi si possono trovare al massimo 6 angoli acuti distinti e non 8 come richiesto dal problema.

J5. (*18 punti*) In un piano sono assegnati alcuni punti non collineari (cioè non giacenti tutti su una stessa retta), in numero finito maggiore o uguale a tre. È vero che fra di essi ne esistono necessariamente tre tali che il cerchio delimitato dalla circonferenza passante per questi tre non contenga al suo interno alcuno dei punti rimanenti?

Soluzione: sì.
Fra i punti assegnati se ne scelgano due diversi, A e B, in modo che la distanza fra di essi sia la minima possibile (i punti sono in numero finito, dunque lo sono anche le coppie di punti diversi e quindi esiste la distanza minima fra due punti diversi). Sia C un punto diverso da A e da B che massimizzi la misura dell'angolo ACB (un tale punto C esiste perché i punti sono in numero finito). Il cerchio che ha sul suo bordo i tre punti A, B, C non può contenere al suo interno alcun altro punto fra quelli assegnati (pur potendone contenere sul bordo). Sia infatti D un qualunque punto interno a questo cerchio (diverso dal centro) e sia D' l'altro punto (sul bordo del cerchio) della congiungente A con D: l'angolo AD'B misura quanto l'angolo ACB, per cui l'angolo ADB ha una misura superiore a quella dell'angolo ACB.

J6. (*22 punti*) Nel piano sono assegnati alcuni poligoni, non necessariamente convessi, in numero finito. Essi sono disposti in modo tale che due qualsiasi fra loro abbiano almeno un punto in comune. Dimostrare che esiste una retta che li interseca tutti.
L'affermazione rimane vera se, invece di poligoni, si considerano insiemi generici di punti?

Soluzione
Si scelga una qualsiasi retta nel piano: la proiezione ortogonale su di essa di ognuno dei poligoni è un segmento chiuso (non banale). Si consideri l'insieme di tutti i segmenti ottenuti in questo modo: essi devono avere intersezione non vuota, poiché i segmenti hanno a due a due intersezione non vuota (ad esempio, il più a destra degli estremi sinistri dei vari segmenti è un punto comune a tutti). Si consideri un punto in tale intersezione: la retta del piano passante per quel punto e ortogonale a quella scelta deve intersecare tutti i poligoni.
Per insiemi generici l'affermazione è falsa: si considerino ad esempio i cinque insiemi costruiti come segue.
Si associ ad ogni vertice di un decagono regolare una delle 10 coppie che si possono formare con le 5 lettere A, B, C, D, E (coppie diverse etichettano vertici diversi). Ad ogni lettera si associ ora l'insieme dei 4 vertici etichettati dalle coppie che contengono tale lettera (in figura tali vertici sono collegati da segmenti di ugual colore, che non sono contenuti nell'insieme): ogni quaterna ha in comune con ciascuna delle altre un punto, ma, per intersecare ognuna delle quaterne, una retta dovrebbe passare per almeno tre dei vertici, il che non può accadere.