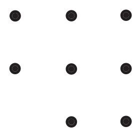
Kangourou Italia
Gara del 28 marzo 2008
Categoria Cadet
Per studenti di terza della scuola secondaria di primo grado o prima della secondaria di secondo grado

Cadet

I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. Quanti quadrati si possono tracciare che abbiano come vertici quattro dei punti in figura?

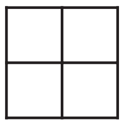


A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

2. Una classe è composta da 9 ragazzi e 13 ragazze. Metà di loro ha l'influenza. Qual è il minimo numero di ragazze che hanno sicuramente l'influenza?
A) 7 B) 5 C) 2 D) 6 E) 4

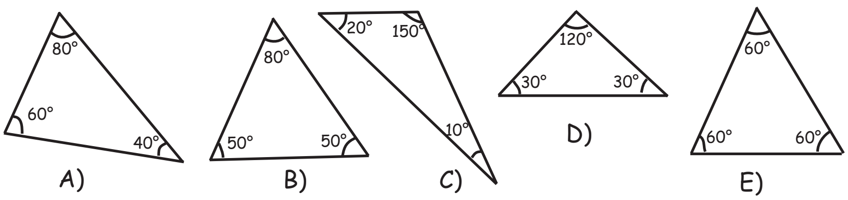
3. In una gara sono assegnati 12 quesiti: gli elaborati sono stati distribuiti tra i membri della commissione giudicatrice in modo che tutti gli elaborati relativi ad un quesito siano valutati da due commissari e che ogni commissario valuti gli elaborati di tre quesiti. Quanti sono i membri della commissione?
A) 6 B) 8 C) 12 D) 18 E) 24

4. I numeri 2, 3, 4, insieme ad un altro numero sconosciuto, sono scritti nella griglia 2x2 a lato, uno per ogni casella. Si sa che la somma dei numeri della prima riga vale 9 e che la somma dei numeri della seconda riga vale 6. Il numero sconosciuto è



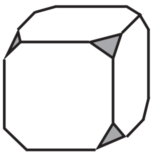
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 4

5. Pierino crede che, se un triangolo è isoscele, allora tutti i suoi angoli siano acuti. Quale delle seguenti figure può convincerlo del contrario?



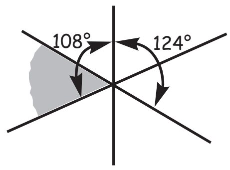
6. Una fioraia ha a disposizione 24 rose bianche, 42 rosse e 36 gialle. Vuole comporre tanti mazzi identici, utilizzando tutti i fiori. Quanti mazzi può comporre al massimo?
A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

7. Ad un cubo sono stati segati tutti suoi vertici, come è illustrato dalla figura. Quanti spigoli possiede il nuovo solido così ottenuto?



A) 26 B) 30 C) 36
D) 40 E) 48

8. In figura sono rappresentate tre rette a, b, c che si intersecano in un punto, formando angoli l'ampiezza di due dei quali (in gradi) è indicata in figura. Quanti gradi misura l'angolo dipinto di grigio?



A) 52 B) 53 C) 54
D) 55 E) 56

9. Daniele ha 9 monete, ciascuna da 2 centesimi; sua sorella Anna ha 8 monete, ciascuna da 5 centesimi. Qual è il minimo numero di monete che devono cambiare proprietario perché ciascuno abbia la stessa quantità di denaro?
A) 4 B) 5 C) 8 D) 12
E) La situazione non è realizzabile.

10. Alcuni amici si salutano: ciascuno stringe la mano a tutti gli altri. Se le strette di mano sono state 15, quanti sono gli amici?
A) 15 B) 6 C) 5 D) 7 E) 14

I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. I due autobus che prestano servizio sulla linea circolare intorno a Kangcity passano da una certa fermata a intervalli regolari di 25 minuti. Quanti autobus bisogna aggiungere sulla linea per accorciare l'intervallo di attesa del 60%?
A) 1 B) 2 C) 3 D) 5 E) 6

12. Il matematico francese August de Morgan, morto nel 1899, soleva dire di aver avuto x anni nell'anno x^2. Quando nacque de Morgan?

A) 1806 B) 1848 C) 1849 D) 1899

E) In un altro anno.

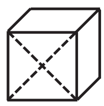
13. Vogliamo visitare quattro isole A, B, C, D partendo dalla terraferma, utilizzando i traghetti che le collegano. C è collegata nei due versi con la terraferma; A e C sono collegate tra loro nei due versi come pure A e D. A e B possono essere solo raggiunte dalla terraferma come A da B. Qual è il minimo numero di corse sufficiente a visitare tutte le isole (con partenza e arrivo sulla terraferma) ?

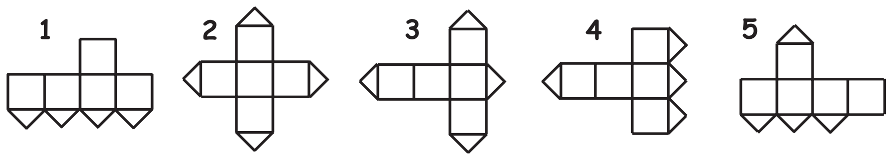
A) 6 B) 5 C) 8 D) 4 E) 7

14. Tom e Jerry hanno ciascuno un rettangolo. I due rettangoli sono uguali. Ciascuno taglia il proprio. Tom ottiene due rettangoli ognuno dei quali ha perimetro di 40 cm, mentre Jerry ottiene due rettangoli ognuno dei quali ha perimetro di 50 cm. Qual era il perimetro di ciascuno dei rettangoli iniziali?

A) 40 cm B) 50 cm C) 60 cm D) 80 cm E) 90 cm

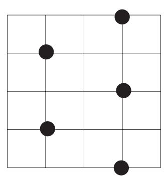
15. Una faccia di un cubo è tagliata lungo le sue due diagonali. Quali dei seguenti non sono sviluppi piani di tale cubo?





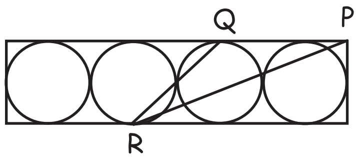
A) 1 e 3 B) 1 e 5 C) 3 e 4 D) 3 e 5 E) 2 e 4

16. Su questa griglia sono evidenziati 5 punti. Fra tutte le spezzate congiungenti i 5 punti formate da 4 segmenti consecutivi, quante sono quelle che suddividono il quadrato in due regioni di uguale area?



A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

17. Quattro cerchi congruenti di raggio 6 centimetri sono tangenti tra loro e ai lati del rettangolo come in figura. Se P è un vertice del rettangolo e Q ed R sono punti di tangenza, quanti centimetri quadrati misura l'area del triangolo PQR?



A) 27 B) 45 C) 54 D) 108 E) 180

18. Una scatola contiene sette carte numerate da 1 a 7. Due saggi pescano a caso delle carte dalla scatola: il primo ne prende tre, il secondo due delle rimanenti; le ultime due restano chiuse nella scatola. Il primo saggio, dopo aver guardato solo i numeri scritti sulle carte da lui pescate, dice al secondo: "Sono certo che la somma dei numeri riportati sulle tue carte è pari". Quanto vale la somma dei numeri riportati sulle carte pescate dal primo saggio?

A) 10 B) 12 C) 6 D) 9 E) 15

Cadet

19. Lucia e Carlo partono per un'escursione in montagna. Alla partenza leggono su un segnavia che la loro destinazione si trova a 2 ore e 55 minuti di cammino. Lasciano il villaggio alle 12 in punto e alle 13 esatte fanno la prima sosta e leggono su un altro segnavia che la loro destinazione è solo a 1 ora e 15 minuti di distanza. Dopo un quarto d'ora di sosta continuano l'escursione alla stessa velocità di prima e senza soste. A che ora arrivano a destinazione?

A) alle 14:30 B) alle 14:00 C) alle 14:55
D) alle 15:10 E) alle 15:20

20. Su una retta sono segnati dei punti. Alcune delle distanze tra di essi sono: 1 cm, 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm. Qual è il minimo numero di punti che permette di realizzare questa condizione?

A) 4 B) 5 C) 6 D)7 E) 8

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

21. Nell'uguaglianza KAN – GAR = OO ogni lettera rappresenta una cifra (in notazione decimale): lettere diverse rappresentano cifre diverse, lettere uguali rappresentano cifre uguali. Qual è il massimo valore che può essere assunto dal numero KAN?

A) 987 B) 876 C) 865 D) 864 E) 785

22. In una compagnia le ragazze sono più del 45% ma meno del 50%. Qual è il minimo numero di ragazze che devi pensare facciano parte di tale compagnia?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

23. Un ragazzo dice sempre il vero al giovedì e al venerdì, mente sempre al martedì, mentre negli altri giorni della settimana mente o dice la verità senza una regola. Gli è stato chiesto il suo nome per sette giorni di fila e nei primi sei ha fornito nell'ordine le seguenti risposte: Luca, Mario, Luca, Mario, Piero, Mario. Che cosa ha risposto il settimo giorno?

A) Luca B) Mario C) Piero D) Rita
E) Non ci sono dati sufficienti per decidere.

24. Matilde ha disegnato 36 canguri usando tre colori distinti. Il bianco è stato usato per 25 canguri, il rosso per 28 e il nero per 20. Solo per 5 canguri sono stati usati tutti e tre i colori. Quanti dei canguri disegnati sono di un solo colore?

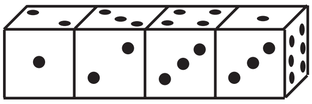
A) Nessuno. B) 4 C) 12 D) 31
E) È impossibile stabilirlo con certezza.

25. Chiamiamo "speciale" una terna di numeri primi positivi se il loro prodotto è uguale a cinque volte la loro somma. Quante terne speciali esistono?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

26. Siano A l'insieme dei numeri di 5 cifre tali che il prodotto delle loro cifre è 25 e B l'insieme dei numeri di 5 cifre tali che il prodotto delle loro cifre è 15. Quale dei due insiemi contiene più elementi? Qual è il rapporto tra il numero di elementi dell'insieme più numeroso e il numero di elementi dell'altro?

A) l'insieme A; rapporto 5/3. B) l'insieme A; rapporto 2.
C) l'insieme B; rapporto 5/3. D) l'insieme B; rapporto 2.
E) A e B hanno lo stesso numero di elementi; rapporto 1.



27. Quattro dadi identici sono accostati come in figura. Le facce di ciascun dado sono numerate da 1 a 6, ma i dadi non sono standard, cioè la somma dei punti di due facce opposte può non valere 7. Qual è la somma totale dei punti che compaiono sulle 6 facce ciascuna delle quali viene a contatto con qualche altra faccia?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 22 E) 23

28. Per ogni numero di due cifre, sottraiamo la cifra delle unità da quella delle decine. Quanto vale la somma di tutte queste differenze?

A) 90 B) 100 C) 55 D) 45 E) 30

29. Il massimo comun divisore di due numeri interi positivi m e n è 12 e il loro minimo comune multiplo è un quadrato perfetto. Allora quanti dei 5 numeri razionali $\frac{n}{3}, \frac{m}{3}, \frac{n}{4}, \frac{m}{4}, m \cdot n$ sono dei quadrati perfetti?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

E) Non si può decidere senza altre informazioni.

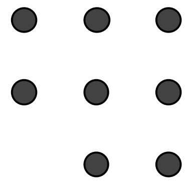
30. Denotiamo con M il prodotto del perimetro di un triangolo per la somma delle tre altezze dello stesso triangolo. Quale delle seguenti affermazioni è falsa se l'area del triangolo vale 1?

A) M può essere maggiore di 1000.
B) M è sempre maggiore di 6.
C) M può essere uguale a 18.
D) Se il triangolo è rettangolo, allora M>16.
E) M può valere meno di 12.

Categoria Cadet
Per studenti del terzo anno della scuola secondaria di primo grado
o del primo anno della scuola secondaria di secondo grado

Soluzioni

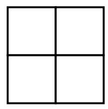
1. Risposta **C)** Oltre ai 3 quadrati, facilmente individuabili, con lati verticali o orizzontali, c'è un quarto quadrato che ha come vertici il primo e il terzo punto della seconda riga e il primo e il terzo punto della seconda colonna.



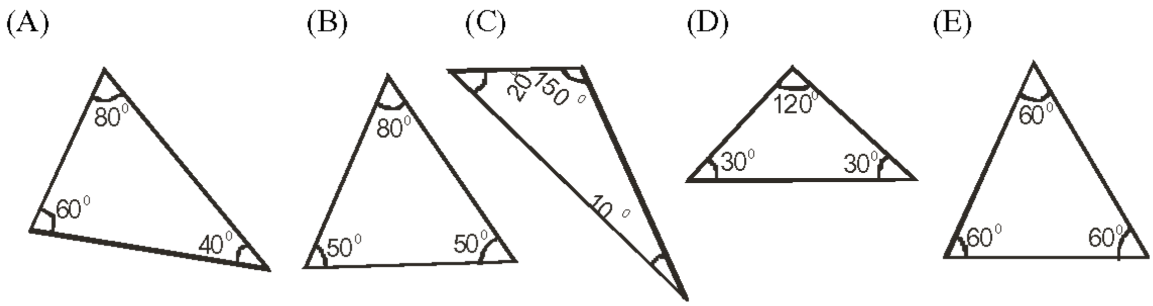
2. Risposta **C)** Il numero totale di allievi è 22, quindi hanno l'influenza in 11; di questi al massimo 9 possono essere maschi, per cui almeno 2 devono essere femmine.

3. Risposta **B)** Il numero dei quesiti di cui operare la correzione è 12×2; se ogni commissario deve correggere 3 quesiti, i commissari devono essere 8.

4. Risposta **B)** La somma dei numeri nelle quattro caselle è 15 e quella dei tre numeri noti vale 9: quindi il numero mancante è 6. La situazione descritta è realizzata dal porre 6 e 3 nelle caselle della prima riga e 2 e 4 nelle caselle della seconda



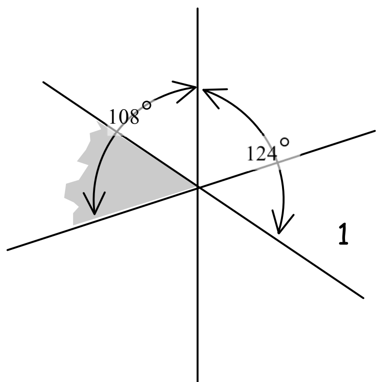
5. Risposta **D)** Basta esibire un esempio di triangolo isoscele che abbia un angolo non acuto: fra quelli proposti l'unico con questi requisiti è D).



6. Risposta **B)** Per utilizzare tutti i fiori in ogni mazzo la fioraia deve mettere un numero di rose bianche che divida 24, un numero di rose rosse che divida 42, un numero di rose gialle che divida 36: quindi il numero di mazzi componibili è un divisore comune di 24, 36 e 42; se si vuol trovare il massimo numero di mazzi componibili, si deve cercare il massimo comun divisore tra 24, 36 e 42, che è 6.

7. Risposta **C)** Infatti sopravvivono i 12 spigoli del cubo e ad essi vanno aggiunti per ciascuno degli 8 vertici del cubo i 3 spigoli corrispondenti alla base della piramide rimossa. In totale: 12 + 3×8 = 36 spigoli.

8. Risposta **A)** La parte di piano che nel disegno non presenta indicazioni di misura è l'angolo supplementare di



quello richiesto. Esso misura 360° - (108 + 124)° = 128°, per cui l'angolo richiesto misura (180 - 128)° = 52°.

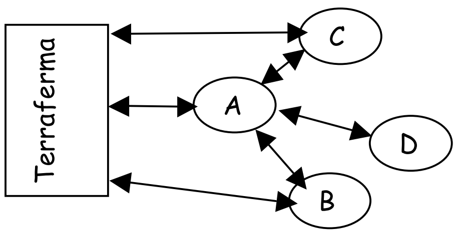
9. Risposta **B)** Daniele ed Anna possiedono complessivamente 18 + 40 = 58 centesimi: devono quindi scambiarsi delle monete in modo che ciascuno resti con 29 centesimi. Un modo per realizzare l'uguaglianza è che Anna ceda 3 delle sue monete a Daniele e che Daniele ne ceda due delle sue ad Anna. Questo è il minimo numero di scambi possibili. Infatti Anna non può cedere meno di 3 monete (altrimenti resterebbe con più di 29 centesimi) e d'altra parte è costretta a cederne un numero dispari, altrimenti la somma dei valori delle sue monete non potrebbe essere dispari; l'alternativa sarebbe quindi che Anna cedesse 5 monete (e il fratello gliene cedesse 7), ma il numero di monete che cambierebbero proprietario sarebbe in tal caso maggiore di 5.

10. Risposta **B)** Se il numero degli amici è N, ognuno stringe N - 1 mani, ma ogni stretta di mano è condivisa da due amici. In totale quindi si verificano N(N - 1)/2 strette di mano: questo numero vale 15 se e solo se N(N - 1) = 30, cosa che, se N è un numero positivo, si realizza solo per N = 6.

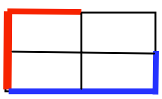
11. Risposta ***C)*** Il tempo di percorrenza del circuito è di 50 minuti. I tempi di attesa risultano accorciati del 60% se passano da 25 a 10 minuti (in quanto 10 è il 40% di 25): quindi servono in totale 5 autobus, cioè se ne devono aggiungere 3.

12. Risposta ***A)*** Visto che de Morgan è morto nel 1899, è ragionevole che l'anno x^2 sia compreso tra il 1800 e il 1899. Ora posto x = 42 si trova che x^2 = 1764; quindi 42 è troppo piccolo; posto x = 44 si trova che x^2 = 1936; quindi 44 è troppo grande! Invece posto x = 43 si trova che x^2 = 1849 che è una data che soddisfa i requisiti. Dunque
$x^2 - x$ = 1849 – 43 = 1806 è la data di nascita di de Morgan.

13. Risposta ***A)*** Un grafo dei collegamenti tra le isole è fornito a lato. Un tragitto possibile è TBADACT. Non è possibile compiere un numero di tragitti inferiore in quanto, essendo D collegata solo con A, è indispensabile metter in conto oltre al percorso circolare tra la terra e le tre isole con più di un collegamento anche due corse (andata e ritorno) tra A e D.

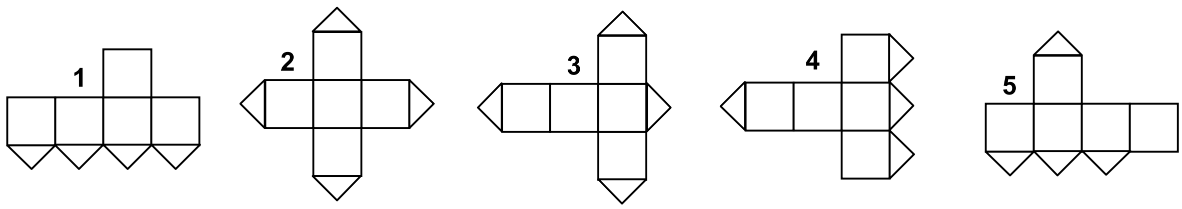


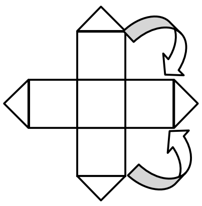
14. Risposta ***C)*** Denotiamo con $2x$ e $2y$ le misure in centimetri dei lati del rettangolo iniziale: allora il semiperimetro di ciascuno dei rettangoli di Tom soddisfa l'equazione $2x + y = 20$ e il semiperimetro di ciascuno dei rettangoli di Jerry soddisfa l'equazione $x + 2y = 25$. Dal sistema delle due equazioni si ricava che $y = x + 5$ e quindi
$x = 5$ e $y = 10$; quindi la misura in centimetri del perimetro del rettangolo iniziale vale
$4(x + y) = 60$.



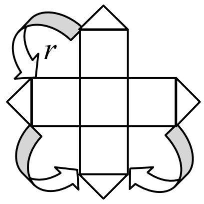
In maniera più elementare, Tom ha tagliato il suo rettangolo secondo una mediana, Jerry secondo l'altra. Allora ciascuno dei rettangoli tagliati da Tom e di quelli tagliati da Jerry è formato da due rettangolini uguali i cui lati misurano metà dei lati del rettangolo iniziale. Allora il perimetro del rettangolo iniziale è 4 volte il semiperimetro di uno di tali rettangolini; inoltre la somma dei semiperimetri dei rettangoli di Tom e di Jerry (= 20 + 25 cm) sarà 3 volte il semiperimetro di ognuno di questi rettangolini: dunque il perimetro del rettangolo iniziale sarà (45 : 3) × 4 cm.

15. Risposta **D)**



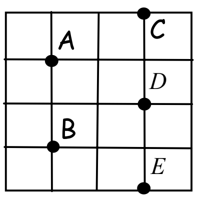


In **2** i 4 triangoli si congiungono a formare il quadrato "coperchio" del cubo; **4** si può pensare ottenuto da 2 ruotando di 90° due quadrati con triangolo, come nella figura **a sinistra**;



1 si ottiene da 2 come indicato nella figura **a destra** ruotando di 90° (rotazione *r*) il quadrato con triangolo più in alto e poi ruotando la coppia di quadrati con triangoli così ottenuta ancora di 90° nello stesso verso e il quadrato con triangolo a destra in verso opposto: quindi tutti questi sono sviluppi del cubo.
Invece quando si cerca di "riavvolgere" **3** si vede che i triangoli in alto e in basso vanno a sovrapporsi al primo quadrato a sinistra (e quindi mancano due triangoli per chiudere l'ultima faccia); quando si cerca di "riavvolgere" **5** si trova che il triangolo in alto si sovrappone sul quadrato più a destra (e quindi manca un triangolo per chiudere l'ultima faccia).

16. Risposta **D)** Il quadrato è suddiviso in 16 quadretti uguali: le due figure in cui esso è diviso dalla spezzata devono quindi avere area pari a 8 quadretti. Una spezzata che soddisfa tali condizioni è CADBE; altre due sono CABDE e la sua simmetrica CDABE.



Ogni altra spezzata fatta da 4 segmenti consecutivi che congiungano i 5 punti o è intrecciata (ad esempio CAEBD) e delimita più di 2 figure oppure ha almeno uno dei punti estremi non appartenenti ai lati del quadrato (come ABEDC o ACDEB) e quindi alcuni dei suoi segmenti non sono utili a delimitare una figura.

17. Risposta **D)** Il triangolo ha altezza pari al diametro dei cerchi (12) e base pari al triplo del raggio (18). Dunque l'area vale 12 × 9 = 108.

18. Risposta **B)** Per essere sicuri che, in un insieme assegnato di numeri, la somma di due qualunque di essi sia pari, occorre che i numeri dell'insieme siano tutti pari oppure tutti dispari. Dopo che il primo saggio ha pescato, rimangono quattro numeri. Dei numeri compresi fra 1 e 7, tre sono pari e quattro dispari: allora il primo saggio deve avere pescato proprio i tre numeri pari, la cui somma è 12.

19. Risposta **B)** Il tempo totale previsto per l'escursione è di 175 minuti; il tempo previsto per la seconda frazione è di 75 minuti: quindi i due ragazzi devono ancora fare i 75/175 = 3/7 di cammino. Se hanno percorso 4/7 di cammino in 60 minuti, percorreranno i restanti 3/7 in 45 minuti, che sommati ai 60 minuti precedenti e ai 15 di sosta portano la durata effettiva dell'escursione a 2 ore.

20. Risposta **B)** Quattro punti A, B, C, D allineati individuano solo 6 segmenti: AB, AC, AD, BC, BD, CD: quindi non sono sufficienti a realizzare le 9 distanze richieste. Invece 5 punti individuano 15 segmenti. In particolare prendendo A, B, C, D, E in questa successione in modo che AB = 1 cm, BC = 3 cm, CD = 3 cm, DE = 2 cm (quindi con AE = 9 cm) si ha: AC = 4 cm, CE = 5 cm, BE = 6 cm, AD = 7 cm, BE = 1 cm.

21. Risposta **D)** Per ipotesi GAR + OO = KAN, cioè
$100G + 10(A + O) + (R + O) = 100K + 10A + N$; dunque

$$100(K - G) = 10 \times O + (R + O - N).$$

Osserviamo che $R + O - N < 19$, poiché R, O ed N sono cifre.
Allora $10 \times O + (R + O - N)$ può essere un multiplo di 100 solo se

$$O = 9, \qquad R + O - N = 10\,, \qquad K - G = 1,$$

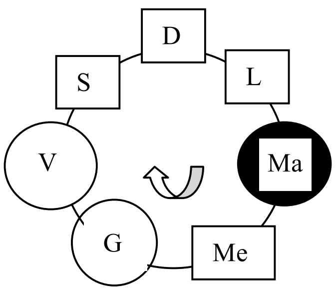
cioè

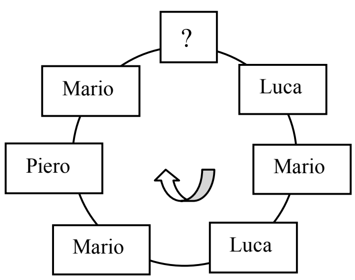
$$O = 9, \qquad R = N + 1\,, \qquad K = G + 1.$$

Dunque se si vuole che KAN assuma il valore massimo compatibile con l'uguaglianza, si devono scegliere nell'ordine: K = 8 (e di conseguenza G = 7), A = 6, R = 5 (e di conseguenza N = 4) cioè 765 + 99 = 864.
Si può pervenire al risultato anche con "tentativi ragionati", tenendo conto che:
1) sommando un numero di due cifre la cifra delle centinaia può aumentare solo di 1, quindi K = G + 1;
2) sommando due cifre si ottiene un numero minore di 19, quindi dalla somma delle unità si ha un riporto 1: solo sommando GAR con 99 si può ottenere che la cifra delle decine sia ancora A.

22. Risposta **C)** Si sa che se il numero delle ragazze è p e il numero di persone della compagnia è q risulta $45/100 = 9/20 < p/q < 50/100 = 1/2$: si deve cercare la frazione p/q con numeratore minimo che realizzi queste condizioni. In virtù della seconda q deve essere maggiore di $2p$ e quindi deve essere almeno $q = 2p + 1$; in base alla prima si deve avere $20p > 9q$ e quindi se $q = 2p + 1$ si deve avere $2p > 9$, cioè $p = 5$.
In effetti $1/2 > 5/11 > 9/20$, poiché $5 \times 20 > 9 \times 11$.

23. Risposta **A)** Costruiamo un cerchio della verità settimanale ed un cerchio delle risposte date e confrontiamoli: ovviamente il secondo va ruotato in modo da avere risposte coerenti con il primo (nei cerchi bianchi i giorni veritieri, in quello nero il giorno di bugie). Sul primo cerchio ci sono due giornate di verità



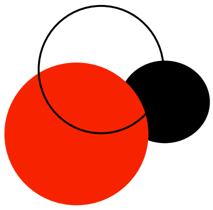


consecutive, ma nel secondo non c'è mai una risposta ripetuta: dunque al posto del punto di domanda dovrà esserci o Mario o Luca e sarà il vero nome del ragazzo. Non può esserci Mario poiché la risposta Mario è stata data anche due giorni prima delle due risposte consecutive (cioè martedì, giorno di bugie); dunque deve esserci Luca: la cosa è coerente con il cerchio della verità, poiché l'altra risposta uguale cade due giorni dopo, cioè di domenica, giorno in cui il ragazzo può dire la verità o mentire.

La soluzione può essere descritta anche nel modo seguente.

Il ragazzo dice la verità in due giorni consecutivi, mentre mente due giorni prima; quindi ci aspettiamo un segmento di valori di verità delle risposte del tipo … F ? VV … (dove F sta per "falsa" e V per "vera") che non si trova in LMLMPM (dove ogni nome è rappresentato con la sua iniziale). Allora la sequenza di risposte può essere completata o premettendo una L o posponendo una M. La soluzione LMLMPMM non va bene poiché, se si suppone che il segmento MM corrisponda al segmento di valori di verità VV, il segmento conclusivo MPMM dovrebbe corrispondere a un segmento di valori di verità VFVV e non F?VV. La prima soluzione LLMLMPM invece produce una sequenza di valori di verità VVFVFFF che (operata una permutazione circolare) diventa FVFFFVV e contiene quindi un segmento del tipo … F ? VV.

24. Risposta **B)** Denotiamo con B, R, N gli insiemi dei canguri che hanno parti rispettivamente bianche, rosse o nere (parti che possono anche essere l'intero canguro). Per sapere quanti canguri non hanno più di un colore osserviamo che, posto per brevità



$$C = B\cap N,\quad D = N\cap R,\quad E = B\cap R,\quad F = B\cap N\cap R,$$

risulta

$$|B\cup R\cup N| = |B| + |R| + |N| - (|C| + |D| + |E|) + |F|$$

ove con le due barre verticali si è indicato, in ogni posto, il numero di elementi dell'insieme contenuto tra le barre. Dunque

$$36 = 25 + 28 + 20 -(|C| + |D| + |E|) +5$$

cioè $(|C| + |D| + |E|) = 42$. Ma l'insieme $C\cup D\cup E$ contiene i canguri tricolori contati 3 volte (uno per ciascun insieme di appartenenza): dunque i bicolori sono in numero di 42 - 15 = 27. Quindi i monocolori sono in numero di 36 - 5 - 27 = 4.

Vari sono i modi per realizzare questa situazione, ad esempio

tricolori	rossi	bianchi	neri	rosso - bianchi	nero - bianchi	nero - rossi
5	4			12	8	7
5		4		12	4	11
5			4	16	6	5
5	3	1		12	7	8

25. Risposta **B)** Siano p, q, r tre numeri primi che formino una terna speciale, cioè sia $pqr = 5(p + q + r)$.

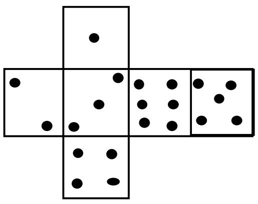
Allora 5 deve dividere uno dei fattori primi del numero pqr cioè, dovendo dividere uno dei numeri primi della terna, coincide con esso: sia $r = 5$.

Semplificando, $pq = p + q + 5$ o anche $pq - (p + q) + 1 = 5 + 1$, che si scompone come

$(p - 1)(q - 1) = 6 = 2\times3$. Tanto 2 che 3 devono dividere il prodotto $(p - 1)(q - 1)$: ma, se uno di essi dividesse un fattore e l'altro il rimanente, si avrebbe ad esempio $p - 1 = 2$ e $q - 1 = 3$, impossibile poiché q è primo; quindi entrambi devono dividere lo stesso fattore, mentre l'altro fattore è 1. Allora risulta $p = 2$ e $q = 6 + 1 = 7$.
Quindi la sola terna accettabile è (2,5,7).

26. Risposta **D)** Poiché valgono le scomposizioni in numeri primi: $25 = 5 \times 5$ e $15 = 3 \times 5$, i numeri dell'insieme A sono quelli che contengono le cifre 1,1,1,5,5 mentre quelli dell'insieme B sono quelli che contengono le cifre 1,1,1,3,5. Allora i numeri dei due insiemi differiscono esclusivamente per il fatto che alle coppie di 5 in A corrispondono in B due differenti possibili coppie ordinate (3,5) o (5,3): quindi per ogni numero di B se ne ottiene uno diverso scambiando la posizione delle cifre 3 e 5, mentre un analogo scambio sulle cifre 5 e 5 in un ogni numero di A riproduce lo stesso numero. Dunque il numero di elementi di B è doppio del numero di elementi di A.

27. Risposta **B)** La figura suggerisce che la faccia con 3 punti ha spigoli in comune con le facce contenenti 1, 6, 4 e 2 punti e quindi ha come faccia opposta quella contenente 5 punti. La faccia opposta a quella con 1 punto non può che contenere 4 punti (essendo



sicuramente adiacente a quelle con 2, 3 e con 6 punti). Quindi uno sviluppo del dado è quello indicato nel disegno. Allora, sulle facce interne, il primo dado da sinistra nasconde 5 punti, il secondo dado nasconde 1 e 4, il terzo nasconde 2 e 6, il quarto 2 (per convincersi basta piegare opportunamente lo sviluppo). Sommando si ottiene 20.

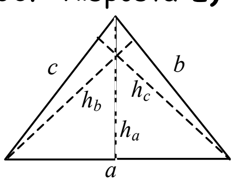
28. Risposta **D)** Per ogni numero di due cifre, che non termini con 0, ne esiste un altro che si ottiene scambiando le cifre: ad es. 93 e 39, oppure 27 e 72. La differenza tra la cifra delle decine e quella delle unità del primo numero si elide con quella delle cifre del numero da esso ottenuto scambiando le cifre. Dunque la somma finale sarà formata solo dalla differenza tra le cifre delle decine e delle unità dei numeri 10, 20 , …, 80, 90. Tale somma vale $1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 8 + 9 = 45$.

29. Risposta **B)** Se $MCM(m,n) = 12$ e $mcm(m,n) = k^2$ si ha $mn = 12k^2$. Dunque il prodotto mn non è mai un quadrato perfetto. Inoltre $mn/12 = k^2$ e quindi $m/3$ è un quadrato perfetto se e solo se lo è $n/4$ (simmetricamente scambiando m con n). D'altra parte $m/3$ e $m/4$ non possono essere contemporaneamente quadrati perfetti (non essendolo $m^2/12$) e similmente $n/3$ e $n/4$. Quindi dei quattro numeri residui solo due possono essere quadrati perfetti.
Mostriamo che ce ne sono effettivamente due. Per ipotesi $m = 12a$ e $n = 12b$ con $MCM(a,b) = 1$ e quindi $12ab = k^2$. Ne segue che

- o sono quadrati $12a$ e b e quindi sono quadrati $m/4 = 3a = 12a/2^2$ ed $n/3 = 2^2b$
- o lo sono $3a$ e $4b$ e quindi sono quadrati $m/4 = 3a$ e $n/3 = 4b$

(ovviamente si possono scambiare i ruoli di a e di b).

30. Risposta **E)** M non può essere inferiore a 12.



Denotiamo con a, b, c le misure dei tre lati e con h_a, h_b, h_c le misure delle altezze corrispondenti. Allora, ricordando che l'area vale 1, si ha
$M = (a + b + c)(h_a + h_b + h_c) =$

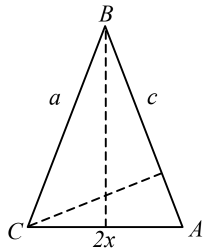
$= ah_a + bh_b + ch_c + (b + c)h_a + (a + c)h_b + (a + b)h_c =$
$= 6 + (b + c)h_a + (a + c)h_b + (a + b)h_c$

Mostriamo innanzi tutto che (E) è falsa, cioè che non può essere $M < 12$; con ciò resterà provata anche la (B), cioè che vale sempre $M > 6$. Per la disuguaglianza triangolare

$$M = 6 + (b + c)h_a + (a + c)h_b + (a + b)h_c \geq 6 + ah_a + bh_b + ch_c = 12.$$

La situazione (C) si verifica sicuramente allorché $a = b = c$ e quindi $h_a = h_b = h_c$: in tal caso infatti $(3a)(3h_a) = 9 \times 2 = 18$.

Quanto ad (A), verifichiamo che è possibile che sia $M > 1000$ andando a costruire un triangolo isoscele ABC con vertice in B di area 1, avente base di lunghezza $b = 2x$ opportunamente piccola. In tal caso:



$$M = (2a + 2x)(2h_a + h_b)$$

ove valendo 1 l'area di ABC si ha $h_b = 1/x$ e $h_a = 2/a$.

Di conseguenza

$$M = 2(a + x)(4/a + 1/x) = 2\,[(a/x) + 1][(4x/a) + 1]$$

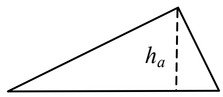
In particolare se si sceglie $x = a/499$ si trova

$$M = 2[499 + 1][1 + 4/499] > 2 \times 500 = 1000.$$

Infine, per quanto riguarda (D) osserviamo che, se ad esempio il triangolo è rettangolo nel vertice opposto ad a, si ha $b = h_c$ e $c = h_b$. Quindi

$$M = 6 + (b + c)h_a + (a + c)h_b + (a + b)h_c = 6 + (b + c)h_a + ac + c^2 + ab + b^2.$$

Ora osserviamo che:



- $h_a = 2/a$ in quanto l'area del triangolo è 1
- $b^2 + c^2 = a^2$ in quanto il triangolo è rettangolo
- essendo il triangolo inscritto in una semicirconferenza di diametro a, risulta $a/2 \geq h_a = 2/a$ e di conseguenza $a^2 \geq 4$

e quindi

$$M = 6 + a^2 + a(b + c) + (b + c)h_a \geq 10 + (b + c)\,(a + 2/a).$$

Ricordando che per la disuguaglianza triangolare $b + c \geq a$,

$$M \geq 10 + a\,(a + 2/a) \geq 10 + 4 + 2 = 16.$$