



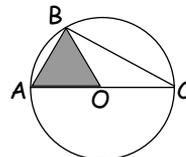
Kangourou Italia
Gara del 15 marzo 2007
Categoria Student
Per studenti di quarta o quinta della
secondaria di secondo grado



I quesiti dal N. 1 al N. 10 valgono 3 punti ciascuno

1. Nella figura, O è il centro del cerchio e l'area della zona ombreggiata è $\sqrt{3}$. Qual è l'area del triangolo ABC ?

- A) $2\sqrt{3}$ B) 2 C) 5
 D) 4 E) $4\sqrt{3}$



2. Secondo alcuni storici, gli antichi Egizi usavano una corda con due nodi per costruire un angolo retto. Se la lunghezza della corda è di 12 metri e uno dei nodi è al punto X , che dista 3 metri da uno dei capi della corda, a quanti metri dall'altro capo deve essere fatto il secondo nodo per avere un angolo retto in X ?

- A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) più di 6



3. Ad un esame di ammissione all'Università, uno studente deve rispondere correttamente ad almeno l'80% delle domande di un questionario. Per adesso, Pietro ha esaminato 15 domande: non ha risposto a 5 di esse, ma è sicuro di aver risposto esattamente alle altre 10. Se risponde correttamente a tutte le domande rimanenti, raggiungerà esattamente l'80% di risposte giuste. Quante sono le domande nel questionario?

- A) 20 B) 25 C) 30 D) 35 E) 40

4. Quanti divisori distinti ha 10^n , se si contano anche 1 e 10^n stesso?

- A) $n^2 + 2n + 1$ B) $n^2 + n + 1$ C) $n^2 - 2n + 1$ D) $n^2 + n$ E) $n^2 + 2n$

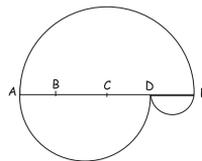
5. Scelti a caso tre dei vertici di un poligono regolare di 41 lati, qual è la probabilità che il triangolo da essi individuato risulti rettangolo?

- A) $3/41$ B) $1/41$ C) $1/2$ D) $6/41$
 E) Nessuna delle precedenti

Student

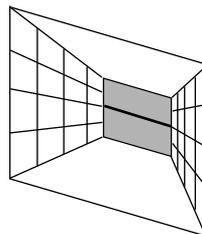


6. Il segmento AE è diviso in 4 parti uguali dai punti ordinati B, C e D. Si disegna al di sopra del segmento AE una semicirconferenza di diametro AE mentre al di sotto del medesimo segmento si disegnano due semicirconferenze di diametro rispettivamente AD e DE (v. figura). Considera il percorso da A ad E lungo la semicirconferenza superiore e quello lungo l'unione delle due semicirconferenze inferiori: qual è il rapporto tra le lunghezze dei due percorsi, presi nell'ordine?
- A) 1:2 B) 2:3 C) 1:1 D) 3:2 E) 2:1

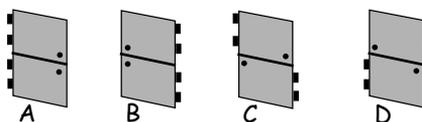


7. Un cono e un cilindro circolari, entrambi di altezza h e con le basi di raggio r , sono in posizione tale che il volume della parte del cono contenuta nel cilindro è esattamente metà del volume del cono. Che frazione del volume del cilindro fornisce il volume della parte del cilindro contenuta nel cono?
- A) $1/2$ B) $1/3$ C) $1/4$ D) $1/5$ E) $1/6$

8. Delle quattro pareti che delimitano un cunicolo, le due laterali (opposte) sono verticali mentre pavimento e soffitto sono paralleli fra loro, ma non perpendicolari alle pareti laterali: di conseguenza la sezione verticale non è un rettangolo, ma un parallelogramma che, osservato dall'ingresso, presenta la parte più bassa sulla destra. A metà del cunicolo si vuole costruire una porta di sbarramento che sia costituita da due sezioni, superiore e inferiore, apribili l'una indipendentemente dall'altra. Guardando dall'ingresso, come vanno incernierate le due sezioni?



Student



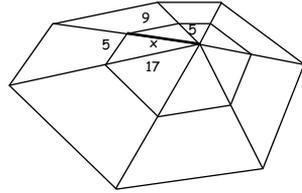
- A) Entrambe sul lato sinistro.
 B) Entrambe sul lato destro.
 C) Quella superiore sul lato sinistro e quella inferiore sul lato destro.
 D) Quella superiore sul lato destro e quella inferiore sul lato sinistro.
 E) Il progetto non è realizzabile.

9. Quanti numeri interi positivi di due cifre significative hanno la seguente proprietà: il quadrato della somma delle cifre è uguale alla somma dei quadrati delle cifre?
- A) 4 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12



10. Osserva la figura: un ragno con competenze matematiche ha tessuto una ragnatela formata da segmenti rettilinei, le cui lunghezze sono tutte numeri interi. Quanto vale x ?

- A) 11 B) 13 C) 15 D) 17 E) 19



I quesiti dal N. 11 al N. 20 valgono 4 punti ciascuno

11. Tommaso è nato il giorno in cui sua mamma compiva 20 anni e così festeggiano il compleanno insieme. Se vivono entrambi sufficientemente a lungo, quante volte l'età (in anni) di Tommaso sarà un divisore dell'età di sua mamma?

- A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

12. Assegnato un quadrato ABCD di lato 1 si considerino tutti i quadrati che hanno in comune con ABCD almeno due vertici. L'area della regione del piano formata dai punti che appartengono ad almeno uno di tali quadrati è

- A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

13. La misura dell'angolo β è il 25% in meno della misura dell'angolo γ e il 50% in più della misura dell'angolo α . Ne deduciamo che la misura dell'angolo γ è

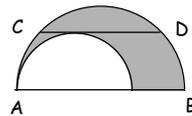
- A) il 25% in più rispetto a quella di α
 B) il 50% in più rispetto a quella di α
 C) il 75% in più rispetto a quella di α
 D) il 100% in più rispetto a quella di α
 E) il 125% in più rispetto a quella di α

14. Assegnata l'equazione $2^{x+1} + 2^x = 3^{y+2} - 3^y$, dove x e y sono interi, il valore x della soluzione (x, y) è

- A) 0 B) 3 C) -1 D) 1 E) 2

15. Si considerino due semicerchi disegnati come in figura. La corda CD, di lunghezza 4, è parallela al diametro AB del semicerchio più grande ed è tangente al semicerchio più piccolo. L'area della regione di piano ombreggiata in figura è

- A) π B) $1,5\pi$ C) 2π D) 3π
 E) le informazioni non sono sufficienti per determinarla



16. La somma di cinque interi consecutivi è uguale a quella dei tre interi consecutivi immediatamente seguenti. Qual è il più grande di questi otto numeri?

- A) 4 B) 8 C) 9 D) 11
 E) nessuno dei valori indicati

Student



17. Un'isola è abitata solo da cavalieri e mentitori. Tutti i cavalieri dicono sempre il vero e tutti i mentitori dicono sempre il falso. Un abitante dell'isola, che indicheremo con A, alla domanda se lui e un altro abitante dell'isola, detto B, siano cavalieri o mentitori, risponde che almeno uno dei due è un mentitore. Quale delle seguenti affermazioni è vera?

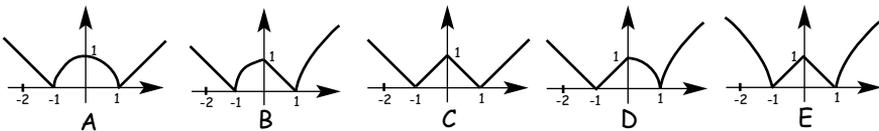
- A) A non può fare tale affermazione B) A e B sono entrambi mentitori
 C) A e B sono entrambi cavalieri D) A è un mentitore e B è un cavaliere
 E) A è un cavaliere e B è un mentitore

18. Si consideri una sfera di raggio 3 con centro nell'origine di un sistema ortogonale di tre assi cartesiani. Quanti punti ci sono sulla superficie della sfera che hanno tutte le coordinate intere?

- A) 30 B) 24 C) 12 D) 6 E) 3

19. Quale dei seguenti è il grafico della funzione f definita da

$$f(x) = \sqrt{|(1+x)(1-|x|)|}$$



20. Marco e Giorgio vanno in piscina; si tuffano insieme e ciascuno dei due nuota a velocità costante. Al termine della ottava vasca Marco raggiunge per la prima volta Giorgio e lo supera; se smettono di nuotare contemporaneamente, ma alle due estremità opposte della piscina, quale dei seguenti può essere il numero di vasche che ha percorso Marco?

- A) 36 B) 41 C) 30 D) 40 E) 27

Student

I quesiti dal N. 21 al N. 30 valgono 5 punti ciascuno

21. Se $f(x) = \frac{2x}{3x+4}$ e $f(g(x)) = x$, allora $g(x) =$

- A) $\frac{3x+4}{2x}$ B) $\frac{3x}{2x+4}$ C) $\frac{2x+4}{4x}$ D) $\frac{4x}{2-3x}$ E) altra funzione

22. Quale dei seguenti numeri non può essere scritto come $x + \sqrt{x}$ con x intero?

- A) 870 B) 110 C) 90 D) 60 E) 30

23. Qual è il massimo valore che può assumere il rapporto tra un numero di tre cifre e la somma delle sue cifre?

- A) 97 B) 100 C) 101 D) 110 E) nessuno dei precedenti



24. Quanti sono gli a reali tali che l'equazione quadratica $x^2 + ax + 2007 = 0$ abbia due soluzioni intere?

- A) 3 B) 4 C) 6 D) 8 E) nessuna delle altre risposte è corretta

25. Ad una festa cinque amici si scambiano regali in modo che ciascuno faccia e riceva esattamente un regalo (e, naturalmente, che nessuno riceva il proprio regalo). In quanti modi diversi lo possono fare?

- A) 5 B) 10 C) 44 D) 50 E) 120

26. La somma $\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}$ è uguale a

- A) 999/1000 B) 99/100 C) 9/10 D) 9 E) 1

27. Le cifre della successione 1234512345123451 ... riempiono le celle su un foglio con una legge del tipo a spirale, partendo dalla cella segnata (v. figura). Quale cifra si viene a trovare sulla cella che sta esattamente 100 celle sopra quella ombreggiata?

	1	2	3		
	5	2	3	4	5
	4	1	1	2	1
	3	5	4	3	2
	2	1	5	4	3

- A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Student

28. Un intero positivo di 5 cifre viene detto "numero dispettoso" se non può essere espresso come prodotto di due interi di 3 cifre ciascuno. Quanto può essere lunga al massimo una sequenza di numeri consecutivi che siano tutti dispettosi?

- A) 11 B) 49 C) 51 D) 101
E) un valore diverso dai precedenti

29. La successione 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ... è costituita da tutti e soli i numeri che sono potenze di 3 o che possono essere scritti come somma di potenze di 3 diverse tra loro, messi in ordine crescente. Qual è il centesimo elemento della successione?

- A) 130 B) 981 C) 1234 D) 2401 E) 3100

30. Anna, Linda e Carlo giocano lanciando un unico dado. Anna vince se ottiene 1, 2 o 3, Linda se ottiene 4 o 5 e Carlo solo se ottiene 6. Il turno ruota da Anna a Linda a Carlo e di nuovo ad Anna, ecc., finché uno dei giocatori vince. La probabilità che Carlo vinca è

- A) 1/6 B) 1/8 C) 1/11 D) 1/13 E) 1/18



Categoria Student

Per studenti degli ultimi due anni della scuola secondaria di secondo grado

1. Risposta **A)**. Il triangolo ABC ha la stessa altezza del triangolo AOB ma base di lunghezza doppia (il diametro del cerchio anziché il raggio); l'area di ABC è quindi il doppio dell'area di AOB .
2. Risposta **C)**. L'unica terna (a,b,c) pitagorica, cioè formata da numeri interi tali che $a^2+b^2=c^2$, con $a=3$ e $a+b+c=12$ è $(3,4,5)$; la distanza del secondo nodo dall'estremo della curva deve essere pari alla lunghezza dell'ipotenusa, quindi 5.
3. Risposta **B)**. Pietro raggiunge l'80% di risposte giuste rispondendo correttamente a tutte le domande tranne 5. Questo equivale a dire che 5 domande sono il 20% del totale, quindi le domande sono 25.
4. Risposta **A)**. $10^n = 2^n 5^n$, perciò i divisori di 10^n sono tutti e soli i prodotti $2^i 5^k$, con $i,k = 0,1,2,\dots,n$. Potendo scegliere i e k ciascuno in $n+1$ modi diversi, i possibili prodotti sono $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.
5. Risposta **E)**. È impossibile che il triangolo sia rettangolo (probabilità 0). Infatti, considerando la circonferenza circoscritta al poligono regolare, il triangolo dovrebbe avere come ipotenusa il diametro della circonferenza, e quindi due vertici simmetrici rispetto al centro del poligono, impossibile se i lati sono 41.
6. Risposta **C)**. Le due semicirconferenze inferiori hanno diametri rispettivamente 3 ed 1, quindi il percorso inferiore ha lunghezza $3\pi + \pi = 4\pi$, esattamente come quello superiore, costituito da una semicirconferenza di diametro 4.
7. Risposta **E)**. Poiché il volume del cilindro è 3 volte il volume del cono, la parte comune, che corrisponde a $\frac{1}{2}$ del volume del cono, corrisponde a $\frac{1}{6}$ del volume del cilindro.
8. Risposta **C)**. Ogni sezione della porta deve aprirsi in modo che l'estremità opposta alla cerniera non venga bloccata da pavimento o soffitto quando ruota verso la parete. Le cerniere della parte alta dovranno quindi essere messe nella parte dove il soffitto è più alto (a sinistra), la sezione inferiore dovrà avere le cerniere dove il pavimento è più basso (a destra).

9. Risposta **B**). Dette x e y , nell'ordine, la prima e seconda cifra, deve essere $(x+y)^2 = x^2 + y^2$ e questo succede solo se $xy=0$. Le cifre significative sono due se x non è 0, quindi y è 0 e i numeri accettabili sono i multipli di 10.
10. Risposta **B**). x , lunghezza di un segmento che appartiene a due dei triangoli formati dalla ragnatela, deve essere maggiore di $17-5=12$ (differenza tra le lunghezze degli altri due lati di uno dei triangoli) e minore di $9+5=14$ (somma delle lunghezze degli altri due lati dell'altro triangolo); poiché x è intero, l'unica possibilità è $x=13$.
11. Risposta **C**). Se chiamiamo x l'età di Tommaso, gli anni della mamma saranno un multiplo degli anni di Tommaso ogni volta che $20+x = kx$, con $k > 1$ intero. Questo equivale a $20 = (k-1)x$ e quindi x deve essere un divisore positivo di 20. I divisori positivi distinti di 20 sono 6: 1,2,4,5,10 e 20.
12. Risposta **C**). I quadrati da considerare sono ABCD, i quattro quadrati esterni costruiti sui suoi quattro lati e i quattro quadrati costruiti sulle sue diagonali. La loro unione è un ottagono la cui area è sette volte quella di ABCD.
13. Risposta **D**). $\beta = \frac{3}{4} \gamma = \frac{3}{2} \alpha$ quindi $\gamma = 2\alpha$.
14. Risposta **B**). $2^x \cdot (2+1) = 3^y \cdot (3^2-1)$ da cui $3 \cdot 2^x = 3^y \cdot 2^3$; (x,y) deve quindi essere una soluzione a coordinate intere di $2^{x-3} = 3^{y-1}$; essendo 2 e 3 primi fra loro, l'unica soluzione è $(3,1)$ da cui $x=3$.
15. Risposta **C**) Detto r il raggio del semicerchio esterno, il raggio del semicerchio interno è $\sqrt{r^2-4}$, quindi la regione tratteggiata ha area $\frac{1}{2} \pi r^2 - \frac{1}{2} \pi (r^2-4) = 2\pi$.
16. Risposta **D**). Se x è il primo degli interi considerati abbiamo $5x + (1+2+3+4) = 3x + (5+6+7)$ quindi $2x = 8$ e il numero richiesto è $x+7 = 11$.
17. Risposta **E**). Se A fosse un mentitore, la sua risposta sarebbe vera, e questo è assurdo. Quindi A è un cavaliere, la risposta da lui data è vera e B è il mentitore presente nella coppia.

18. Risposta **A**). Dette (x,y,z) le coordinate (intere) dei punti sulla sfera deve essere $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; per motivi di simmetria, possiamo limitarci a considerare solo i punti nel primo ottante, con tutte le coordinate ≥ 0 . Le terne accettabili sono $(3,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$, $(2,1,0)$, $(2,0,1)$, $(1,2,0)$, $(1,0,2)$, $(0,1,2)$, $(0,2,1)$; permutando i segni in tutti i modi possibili otteniamo 2 punti sulla sfera per ognuna delle prime 3 terne, e 4 per ognuna della rimanenti 6 terne: in totale 30 punti distinti.
19. Risposta **D**). La funzione coincide con $1+x$ per $x < 0$, con $\sqrt{|1-x^2|}$ per $x > 0$; il grafico corretto è quindi D.
20. Risposta **A**). Se Marco raggiunge Giorgio per la prima volta al termine della propria ottava vasca, Giorgio deve essere al termine della sesta (deve essere al termine di una vasca pari, e non può essere la quarta perchè altrimenti Marco lo avrebbe già raggiunto alla seconda). Quindi la velocità di Marco è $\frac{3}{4}$ di quella di Giorgio. Per fermarsi simultaneamente, ma ad estremità opposte della piscina, il numero di vasche percorse da Marco deve essere un multiplo dispari di 4, e l'unico multiplo dispari di 4, tra i numeri proposti, è 36.
21. Risposta **D**). g è la funzione inversa di f : se poniamo $y = \frac{2x}{3x+4}$, ricaviamo

$$x = g(y) = \frac{4y}{2-3y}.$$
22. Risposta **D**). Poiché nei casi considerati $x + \sqrt{x}$ è intero, x intero implica \sqrt{x} intero. L'uguaglianza $x + \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)$ ci dice che il numero proposto deve essere prodotto di due interi consecutivi, e questo è falso per 60.
23. Risposta **B**). È ovvio che deve essere almeno 100; dette a, b, c le tre cifre ordinate, il numero può essere scritto come $100a + 10b + c$: se il rapporto fosse maggiore di 100, avremmo $100a + 10b + c > 100(a + b + c)$, assurdo.
24. Risposta **C**). Il prodotto delle due soluzioni deve essere 2007; poichè $2007 = 3^2 \times 223$, abbiamo come coppie di soluzioni $(1,2007)$, $(3,669)$, $(9,223)$ e i loro opposti, in totale sei coppie diverse che danno origine, visto che la somma delle soluzioni è $-a$, a sei valori diversi di a .

25. Risposta **C**). Indichiamo con a, b, c, d, e i cinque amici e con A, B, C, D, E i regali che hanno rispettivamente portato: dobbiamo contare le cinquine di coppie (j, K) in cui j e K non assumono lo stesso valore. È più semplice contare le cinquine che contengono coppie del tipo (j, \mathcal{J}) e sottrarre il loro numero dal numero di tutte le cinquine possibili (che è $5!$, il numero dei modi in cui, lasciando nell'ordine dato a, b, c, d, e , posso permutare A, B, C, D, E). C'è un'unica cinquina in cui quattro (e quindi cinque) persone ricevono il proprio regalo; se tre amici ricevono il proprio regalo, gli altri due devono scambiarselo, quindi abbiamo $\binom{5}{3}$ cinquine con tre coppie (j, \mathcal{J}) ; se due amici ricevono il proprio regalo, scelto (tra i due possibili) il regalo per un terzo amico, i regali che ricevono i due rimanenti sono determinati, quindi abbiamo $\binom{5}{2}$ cinquine con due coppie (j, \mathcal{J}) ; contare le cinquine in cui c'è una sola persona che riceve il proprio regalo è, una volta scelta tale persona, lo stesso che contare le quaterne che rappresentano i possibili modi di distribuire quattro regali tra quattro persone in modo che nessuna riceva quello che ha portato: ragionando come sopra possiamo dire che c'è un'unica quaterna in cui tre persone ricevono il proprio regalo, $\binom{4}{2}$ quaterne in cui due persone ricevono il proprio regalo e $2 \times 4 = 8$ quaterne in cui solo una riceve il proprio regalo. Le quaterne accettabili sono perciò $4! - (1 + \binom{4}{2}) + 8 = 9$. Il numero totale di cinquine da scartare è $1 + \binom{5}{3} + 2\binom{5}{2} + 5 \times 9 = 76$ e i modi di distribuire i regali che rispettano il vincolo richiesto sono $5! - 76 = 44$.

26. Risposta **C**). Poiché $\frac{1}{(k+1)\sqrt{k} + k\sqrt{k+1}} = \frac{(k+1)\sqrt{k} - k\sqrt{k+1}}{k(k+1)} = \frac{\sqrt{k}}{k} - \frac{\sqrt{k+1}}{k+1}$, la somma vale $1 - \frac{10}{100} = \frac{9}{10}$.

27. Risposta **A**). Consideriamo i quadrati, centrati nella cella segnata, con lato $3, 5, \dots, 2n+1, \dots$ quadretti. La cella nell'angolo in alto a destra del quadrato con lato $2n+1$ viene occupata dall'elemento della successione di posto $(2n+1)^2$, e la cella che sta esattamente 100 celle sopra quella ombreggiata sta sul bordo del quadrato con lato 201 e precede di 100 posti la cella d'angolo: poiché 100 è multiplo di 5, conterrà lo stesso elemento della cella d'angolo, che è 1 perché è l'elemento di posto $201^2 = 40401$.

28. Risposta **E**) Una simile sequenza non può avere più di 99 termini: infatti ogni sequenza di almeno 100 numeri interi consecutivi contiene qualche multiplo (intero) di 100 e, dividendo per 100 un intero di 5 cifre (che ne sia divisibile), si ottiene come quoziente un intero di 3 cifre. D'altra parte, esistono effettivamente sequenze di 99 numeri dispettosi. Per esempio i 99 numeri della sequenza 0.001, 10.002, 10.003, ..., 10.098, 10.099 sono tutti dispettosi, in quanto il più piccolo è maggiore di $100 \times 100 = 10.000$ e il più grande è minore di $100 \times 101 = 10.100$: è dunque chiaro che nessuno degli interi intermedi può essere espresso come prodotto di due fattori di 3 cifre, in quanto 100 e 101 sono i due più piccoli interi (positivi) di 3 cifre.

29. Risposta **B**). Tra 3^n (compreso) e 3^{n+1} (escluso) ci sono 2^n termini. Infatti posso sommare a 3^n qualunque somma (anche nulla) di potenze distinte di 3 con esponente minore di n , e tali somme sono tante quanti i sottoinsiemi di un insieme di n elementi. 3^{n+1} occuperà allora il posto di indice $\sum_{k=0}^n 2^k + 1 = 2^{n+1}$. Allora 3 è il secondo termine, 3^2 il quarto, ... $3^5=243$ il 32-esimo, $3^6 = 729$ il 64-esimo. Partendo da 729, gli sommo le potenze di 3 nel modo prefissato osservando che, procedendo di 32 passi, devo aggiungere il 32-esimo elemento della successione, cioè 243 e quindi al 96-esimo posto ottengo $729 + 243 = 972$; procedendo di altri 4 passi per arrivare al 100-esimo elemento, devo aggiungere il quarto elemento della successione che è 9, e ottengo come risultato finale 981.

30. Risposta **D**). Al primo turno, la probabilità che Anna vinca è $\frac{1}{2}$; se lei non vince, la probabilità che vinca Linda è $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; se nessuna di loro ha vinto, quindi nei casi restanti ($\frac{1}{3}$ del totale), la probabilità che vinca Carlo è $\frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$; in totale, la probabilità che qualcuno vinca al primo giro è $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{13}{18}$. Il rapporto tra la probabilità che Carlo vinca al giro n -simo e la probabilità che qualcuno vinca al giro n -simo è costante, ed uguale alla probabilità che sia Carlo a vincere. Lo calcoliamo sul primo giro, ottenendo $\frac{1}{18} : \frac{13}{18} = \frac{1}{13}$.