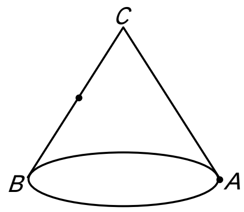
**Kangourou della Matematica 2007**
**finale nazionale italiana**
**Mirabilandia, 7 maggio 2007**

## *LIVELLO STUDENT*

**S1.** (*5 punti*) In un cono circolare retto il raggio del cerchio di base misura 3 cm e la generatrice 6 cm. Una formica vuole arrampicarsi sulla superficie laterale del cono dal punto *A* sul cerchio di base al punto medio della generatrice opposta *BC* (vedi figura). Quanto misura il percorso più breve che può fare la formica?




**S2**. (*7 punti*) Ho 52 carte su ciascuna delle quali è indicato un numero intero positivo e la somma di tutti i numeri indicati è un numero dispari. Gioco con un amico in questo modo: dopo aver messo tutte le carte in fila sul tavolo, uno rimuove una carta a un'estremità della fila e poi passa la mano all'altro che fa la stessa cosa; si itera finché non restano più carte sul tavolo. Alla fine per ogni giocatore si sommano i numeri scritti sulle carte che ha scelto; vince chi ha le carte la somma dei cui numeri è maggiore. C'è una strategia vincente per chi inizia il gioco? In caso affermativo indicane una, in caso negativo fornisci una motivazione.

**S3.** (*11 punti*) Sia *ABC* un qualunque triangolo le cui altezze relative ai vertici *A*, *B*, *C* soddisfino rispettivamente le relazioni: $h_A \geq 3$ cm, $h_B \geq 4$ cm, $h_C \geq 5$ cm. Quanti centimetri quadrati misura al minimo l'area di *ABC*?

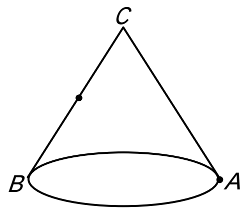
**S4.** (*14 punti*) Quanto vale la somma delle prime ventuno cifre dopo la virgola della divisione per 7 di $2^{2007}$?

**S5***.* (*18 punti*) Un insieme S di numeri naturali positivi è detto "poroso" se è vuoto oppure non contiene tre interi consecutivi. Quanti sono i sottoinsiemi porosi dell'insieme {1, 2, 3, ..., 10}?

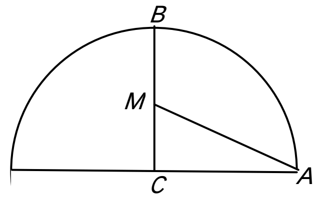
**S6.** (*22 punti*) 2007 sacchetti numerati contengono ciascuno almeno 3000 monete. Le monete di ogni singolo sacchetto sono tutte uguali tra loro per peso e forma e sono contrassegnate con il numero del sacchetto. Escluso un sacchetto che contiene monete false, tutti gli altri contengono monete ufficiali. Le monete ufficiali hanno tutte lo stesso peso, diverso dal peso delle monete false: i due pesi non sono noti. Hai a disposizione una bilancia elettronica. Trova una strategia per stabilire con tre pesate qual è il sacchetto contenente monete false, mostrandone l'efficacia.

## *LIVELLO STUDENT*

**S1.** (*5 punti*) In un cono circolare retto il raggio del cerchio di base misura 3 cm e la generatrice 6 cm. Una formica vuole arrampicarsi sulla superficie laterale del cono dal punto *A* sul cerchio di base al punto medio della generatrice opposta *BC* (vedi figura). Quanto misura il percorso più breve che può fare la formica?




**Soluzione**: $3\sqrt{5}$ cm.




Lo sviluppo della superficie laterale del cono è un settore circolare di centro *C* e raggio pari alla lunghezza della generatrice (6 cm) e arco pari alla circonferenza di base ($6\pi$ cm): quindi è una semicirconferenza sulla quale il punto *A* sta a un'estremità del diametro e il punto *B* sta sul raggio perpendicolare a *CA*. Visto sullo sviluppo, il percorso più breve da *A* al punto medio *M* di *BC* è ovviamente quello rettilineo, quindi si deve calcolare la lunghezza di *AM*, sapendo che *CM* è lungo 3 cm e *CA* è lungo 6 cm.

**S2**. (*7 punti*) Ho 52 carte su ciascuna delle quali è indicato un numero intero positivo e la somma di tutti i numeri indicati è un numero dispari. Gioco con un amico in questo modo: dopo aver messo tutte le carte in fila sul tavolo, uno rimuove una carta a un'estremità della fila e poi passa la mano all'altro che fa la stessa cosa; si itera finché non restano più carte sul tavolo. Alla fine per ogni giocatore si sommano i numeri scritti sulle carte che ha scelto; vince chi ha le carte la somma dei cui numeri è maggiore. C'è una strategia vincente per chi inizia il gioco? In caso affermativo indicane una, in caso negativo fornisci una motivazione.

**Soluzione**: Sì.

Basta considerare la somma delle carte di posto pari e quella delle carte di posto dispari e scegliere come carta di inizio quella appartenente all'insieme *X* la cui somma è maggiore, pescando alle mosse successive la carta di lato a quella appena rimossa dall'avversario. Infatti in questo modo si costringe l'avversario a pescare sempre dall'insieme complementare di *X*.

**S3.** (*11 punti*) Sia $ABC$ un qualunque triangolo le cui altezze relative ai vertici $A$, $B$, $C$ soddisfino rispettivamente le relazioni: $h_A \geq 3$ cm, $h_B \geq 4$ cm, $h_C \geq 5$ cm. Quanti centimetri quadrati misura al minimo l'area di $ABC$?

**Soluzione**: 10.

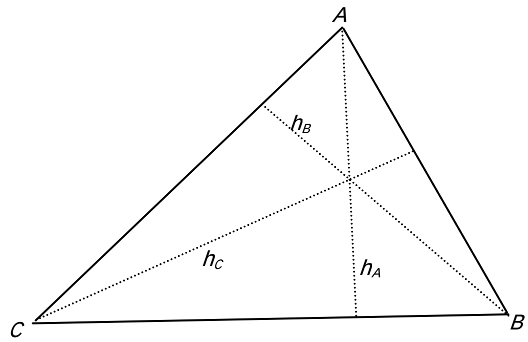
Si denotino con $a$ e $c$ rispettivamente le lunghezze di $BC$ e di $AB$ e con $X$ l'area di $ABC$. Risulta

$$2X = c\,h_C \geq h_B\,h_C \geq 20 \text{ cm}^2.$$

Può risultare $X = 10$ cm$^2$: le disuguaglianze appena scritte mostrano che ciò succede purché $h_C = 5$ cm e $c = h_B = 4$ cm, cioè purché il triangolo sia rettangolo in $A$ e

$$a = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}.$$

In tal caso $h_A = 20/a = \sqrt{400/41} \geq 3$ e quindi anche l'ultima ipotesi è soddisfatta.




**S4.** (*14 punti*) Quanto vale la somma delle prime ventuno cifre dopo la virgola della divisione per 7 di $2^{2007}$?

**Soluzione**: 88.

Osserviamo che se $a = 7q + r$ e $b = 7q' + r'$ risulta $ab = 7(7qq' + qr' + q'r) + rr'$: quindi per cercare il resto (intero) nella divisione per 7 di un numero si può incominciare col cercare il resto della divisione per 7 dei suoi fattori opportunamente raggruppati, farne il prodotto e poi eventualmente dividere ancora per 7. In particolare $2^{2007} = (2^3)^{667}$ e il resto nella divisione per 7 di $2^3 = 8$ è 1. Quindi il prodotto dei resti è $1^{667} = 1$ e di conseguenza quando si porta avanti la divisione (nei numeri decimali periodici, cioè non più negli interi, bensì nei razionali) si avranno come prime cifre quelle della divisione di 1 per 7: 0,142857.... La somma delle prime 18 cifre è 27x3=81. A tale numero va aggiunto 7, somma delle restanti 3 cifre.

**S5.** (*18 punti*) Un insieme S di numeri naturali positivi è detto "poroso" se è vuoto oppure non contiene tre interi consecutivi. Quanti sono i sottoinsiemi porosi dell'insieme {1, 2, 3, ..., 10}?

**Soluzione:** 504.

Infatti, sia S un sottoinsieme poroso di $\mathcal{N}$ = {1, 2, 3, ..., $n$}. Esso può

- non contenere $n$: in tal caso è un sottoinsieme poroso di $\mathcal{N}'$ = {1, 2, 3, ... , $n-1$};
- contenere $n$ ma non contenere $n-1$: in tal caso S \ {$n$} è un sottoinsieme poroso di $\mathcal{N}''$ = {1, 2, 3, ... , $n-2$};
- contenere $n$ e $n-1$ ma non contenere $n-2$: in tal caso S \ {$n-1$, $n$} è un sottoinsieme poroso di $\mathcal{N}'''$ = {1, 2, 3, ... , $n-3$}.

Si ha così una partizione dell'insieme dei sottoinsiemi porosi di $\mathcal{N}$ in insiemi disgiunti, per cui – detti $P_n$, $P_{n-1}$, $P_{n-2}$, $P_{n-3}$ rispettivamente il numero di sottoinsiemi porosi di $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}'$, $\mathcal{N}''$, $\mathcal{N}'''$ – si ha $P_n = P_{n-1} + P_{n-2} + P_{n-3}$. Il calcolo del numero di sottoinsiemi porosi di {1, 2, ... , 10} può quindi essere fatto per ricorrenza, dopo aver osservato che $P_0 = 1$, $P_1 = 2$, $P_2 = 4$ e quindi $P_3 = 7$, $P_4 = 13$, $P_5 = 24$, $P_6 = 44$, $P_7 = 81$, $P_8 = 149$, $P_9 = 274$, $P_{10} = 504$.

**S6.** (*22 punti*) 2007 sacchetti numerati contengono ciascuno almeno 3000 monete. Le monete di ogni singolo sacchetto sono tutte uguali tra loro per peso e forma e sono contrassegnate con il numero del sacchetto. Escluso un sacchetto che contiene monete false, tutti gli altri contengono monete ufficiali. Le monete ufficiali hanno tutte lo stesso peso, diverso dal peso delle monete false: i due pesi non sono noti. Hai a disposizione una bilancia elettronica. Trova una strategia per stabilire con tre pesate qual è il sacchetto contenente monete false, mostrandone l'efficacia.

**Soluzione:** Denotiamo con $p$ il peso di una moneta ufficiale e con $p + x$ quello di una moneta falsa; inoltre dopo aver allineato i sacchetti, sia il $k$-esimo quello irregolare. Poniamo per brevità 2007=$n$.

I pesata: una moneta da ogni sacchetto. Il peso totale sarà: $A = np + x$

II pesata: 1 moneta dal primo sacchetto, 2 dal secondo ecc. Il peso totale sarà: $B = n(n+1)p/2 + kx$

III pesata: $n$ monete dal primo, 1 dal secondo e via crescendo. Il peso totale sarà:

$$C = \frac{n(n+1)}{2}p + f(k)x \quad \text{ove} \quad f(k) = \begin{cases} n & \text{se } k = 1 \\ k-1 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Siamo in presenza di un sistema di 3 equazioni in 3 incognite. Come risultato dell'eliminazione di $p$ e $x$ avremo un test per riconoscere $k$.

Eliminando $p$ tra le seconde due equazioni si ha

$$(1) \qquad B - C = [k - f(k)]x.$$

Per eliminarlo tra le prime 2 moltiplichiamo la prima per $n$+1 e la seconda per 2:

$$(n+1)A = n(n+1)p + (n+1)x$$
$$2B = n(n+1)p + 2kx$$

e sottraiamo membro a membro:

$$(2) \qquad (n+1)A - 2B = (n+1-2k)x$$

Esaminiamo il rapporto tra i primi membri di (2) e (1)

$$\frac{(n+1)A - 2B}{B - C} = \frac{n+1-2k}{k - f(k)} = \begin{cases} -1 & \text{se } k = 1 \\ n+1-2k & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se vale $-1$, allora $k = 1$: infatti non può risultare $n = 2k - 2$, non essendo $n$ pari.

Se non vale $-1$, basta risolvere l'equazione in $k$: $\quad 2k = n + 1 + [(n+1)A - 2B]/[B - C]$.